

Elmer FEM

open source multiphysical simulation software

Руководство по моделям Elmer

Петер Рабак, Мика Малинен, Юха Руоколайнен, Антти
Пурсула, Томас Цвингер, ред.

CSC – IT-центр науки

7 июня 2024 г.

Руководство по моделям Elmer

Об этом документе

Elmer Models Manual является частью документации программного обеспечения Elmer для конечных элементов. Он состоит из независимых глав, описывающих различные модули, также известные как решатели, которые основная программа (ElmerSolver) использует для создания определенной физической модели, хотя некоторые решатели решают вычислительные задачи, не связанные с концепцией физической модели.

Структура руководства отражает модульную архитектуру программного обеспечения, что позволяет добавлять новые модули без внесения каких-либо изменений в основную программу. Каждая глава обычно имеет отдельный раздел для теории и ключевых слов, а также часто дается некоторая дополнительная информация, например об ограничениях модели. Elmer Models Manual лучше всего использовать как справочное руководство, а не как краткое введение в вопрос.

Настоящее руководство соответствует программному обеспечению Elmer версии 9.0. Последняя документация и программа Версии Elmer доступны (или на них предоставлены ссылки) по адресу <http://www.csc.fi/elmer>.

Информация об авторских правах

Оригинальные авторские права на этот документ принадлежат CSC – IT Center for Science, Finland, 1995–2019. Этот документ лицензирован в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution-No Derivative Works 3.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>.

Программа Elmer является свободным программным обеспечением; вы можете распространять ее и/или изменять ее в соответствии с условиями GNU General Public License, опубликованными Free Software Foundation; либо версии 2 Лицензии, либо (по вашему выбору) любой более поздней версии. Программное обеспечение Elmer распространяется в надежде, что оно будет полезным, но без каких-либо гарантий. Более подробную информацию см. в GNU General Public License.

Elmer включает ряд библиотек, лицензированных также по схемам свободного лицензирования, совместимым с лицензией GPL. Подробности см. в уведомлениях об авторских правах в исходных файлах.

Вся информация и спецификации, приведенные в этом документе, были тщательно подготовлены лучшими усилиями CSC и считаются верными и точными на момент написания. CSC не несет ответственности за любые ошибки или неточности в программном обеспечении или документации Elmer. CSC оставляет за собой право изменять программное обеспечение и документацию Elmer без предварительного уведомления.

Содержание

Оглавление	4
I Модели механики жидкости и явлений переноса	8
1 Уравнение теплопроводности	9
2 Уравнения Навье-Стокса	25
3 Уравнение адвекции-диффузии	35
4 Уравнение адвекции-реакции	41
5 Уравнение Рейнольдса для течения тонкой пленки	45
II Модели механики твёрдого тела	51
6 Линейная эластичность	52
7 Конечная эластичность	60
8 Уравнения классической упругости оболочки	67
9 Уравнения линейной упругости пластины	78
10 одномерных уравнений для упругих балок	84
11 Добавление точечных пружин и масс	88
III Модели акустики	90
12 Модель Гельмгольца	91
13 Линеаризованные уравнения Навье-Стокса в частотной области	94
14 Волновое уравнение	103
15. Волновое движение большой амплитуды в воздухе	106
IV Модели электромагнетизма	109
16 Электростатика	110

17 Статическая проводимость тока	114
18 Расчет магнитных полей в 3D	117
19 Решатель цепей и динамики	131
20 Векторный Гельмгольц для электромагнитных волн	136
21 Электромагнитные волны	144
22 Расчет магнитных полей в 2D	147
23 Уравнение магнитной индукции	151
24. Электростатика с уменьшенной размерностью	155
25 Уравнение Пуассона-Больцмана	159
26 Оценка потерь с использованием ряда Фурье	163
27 Решатель тока катушки	168
V Другие физические модели	173
28 Электрокинетика	174
29 Смешанное приближение уравнения Пуассона	178
30 Блок предварительной подготовки для стационарных уравнений Навье-Стокса	181
31 Вращательная форма уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости	187
VI Свободные поверхности, фазовые переходы и динамика частиц	193
32 Метод установки уровня	194
33 Кинематическое уравнение свободной поверхности с ограничителями	200
34 Свободная поверхность с постоянным потоком	204
35 Решатель переходных фазовых изменений	207
36 Решатель изменения фазы в стационарном состоянии	211
37 Динамика частиц	215
38 Полулагранжева адвекция с использованием отслеживания частиц	223
39 Обыкновенное дифференциальное уравнение в подвижной сетке	227
VII. Адаптация, трансформация и анализ сетки	229
Решатель адаптации 40 сеток	230
41 Решатель нефизической адаптации сетки	233

42 Трансформация жесткой сетки	235
43 Структурированный сетчатый картограф	238
44 Свободная поверхность с линиями тока	241
45 Статистика конечно-элементной сетки	243
VIII Производные поля и величины	244
46 Оптимизация вычислений	245
47 Расчет потока	248
48 Расчет вихреобразования	251
49 Расчет дивергенции	253
50 Скалярный потенциал, приводящий к заданному потоку	255
51 Искусственная сжимаемость для FSI	257
52 Жидкостная сила	263
53 Электростатическая сила	265
54 Сокращение системы для решателей смещения	267
55 Фильтрация данных временного ряда	272
56 Данные для решателя поля	275
57 Проекция на плоскость	277
58 Структурированная проекция на плоскость	279
59 Внутренняя оптимизация функции затрат	281
IX Сохранение данных и результатов	284
60 Сохранение скалярных значений в файл	285
61 Сохранение данных по строкам в файл	291
62 Сохранение параметров материала и граничных условий	294
63 Вывод результата в разных форматах	296
64 Сохранение данных на равномерной декартовой сетке	300
65 Извлечение изоповерхности для снижения выходного сигнала	303
66 Связывание Elmer с OpenFOAM через файл IO	305

X Чтение данных	308
67 Чтение полей из файла результатов Gmsh	309
68 Перезагрузить существующие результаты моделирования	310
69 Контроль времени выполнения входных данных	312
70 Чтение данных NetCDF в сетку FE	313
XI Экспериментальные или устаревшие решатели	316
71 Модель литий-ионной батареи	317
72 Уравнение Ричардса для переменного насыщенного пористого потока	326
73 Выходное граничное условие для моделирования артериального потока	330
74 БЭМ-решатель для уравнения Пуассона	334
75 БЭМ-решатель для уравнения Гельмгольца	337
76 Магнитоквазистатическое приближение для аксиальной симметрии	340
77 Линейных Ограничений	344
78 Теория функционала плотности	346
79 Параллельный ввод-вывод с использованием библиотеки HDF5	350
Индекс	352

Часть 1

Модели механики жидкости и Транспортные явления

Модель 1

Уравнение теплопроводности

Имя модуля: HeatSolve,HeatSolveVec
Подпрограммы модуля: HeatSolver
Авторы модуля: Юха Руоколайнен, Петер Рабак, Маттиас Ценкер
Авторы документа: Юха Руоколайнен, Вилле Саволайнен, Петер Рабак

1.1 Введение

Уравнение теплопроводности вытекает из требования сохранения энергии. Кроме того, закон Фурье используется для моделирования теплопроводности. Линейность уравнения может быть нарушена зависящей от температуры теплопроводностью или тепловым излучением.

Обратите внимание, что существует две версии решателя тепловых задач. Более старая версия в модуле HeatSolve включает больше физики, а более новая версия в модуле HeatSolveVec оптимизирована для скорости и имеет некоторые новые функции.

1.2 Теория

1.2.1 Основные уравнения

Уравнение несжимаемой теплоты выражается как

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) = \tau : \epsilon + \rho h, \tag{1.1}$$

где ρ — плотность, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, T — температура, $\mathbf{u}$ — скорость конвекции, $\mathbf{k}$ — теплопроводность, а h — источник тепла. Член $\tau : \epsilon$ — фрикционный вязкий нагрев, который в большинстве случаев пренебрежимо мал. Для ньютоновских жидкостей вязкая часть тензора напряжений равна

$$\tau = 2\mu \epsilon, \tag{1.2}$$

где ϵ — линеаризованный тензор скорости деформации.

Уравнение 1.1 применимо также к твердым телам, при этом $\mathbf{u} = 0$. Для твердых тел проводимость может быть анизотропной, а проводимость — тензором.

Для сжимаемых жидкостей уравнение теплопроводности записывается как

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) = p \nabla \cdot \mathbf{u} + \tau : \epsilon + \rho h, \tag{1.3}$$

где c_v — теплоемкость при постоянном объеме. Плотность необходимо рассчитать из уравнения состояния, например, закона идеального газа. Более подробная информация приведена в главе, описывающей уравнение Навье-Стокса.

Модуль уравнения теплопроводности Элмера способен моделировать передачу тепла путем теплопроводности, конвекции и Рассеянное серое излучение. Также включена модель изменения фазы. Связи с другими модулями включают конвекцию потоком жидкости, фрикционный нагрев (модули, обеспечивающие поля потока) и резистивный нагрев (модули, обеспечивающие магнитные и/или электрические поля).

1.2.2 Произвольные лагранжево-эйлеровы (ALE) координаты

Для задач, включающих деформирующую сетку, уравнение переходного теплообмена должно быть решено с использованием произвольной лагранжево-эйлеровой (ALE) системы отсчета. Предположим, что скорость сетки равна c . Тогда конвективный член дает

$$\rho_{\text{ср}} ((u - c)) \cdot \nabla T \quad (1.4)$$

1.2.3 Модель изменения фазы

У Элмера есть внутренняя фиксированная сеточная модель изменения фазы. Моделирование изменения фазы осуществляется путем изменения определение теплоемкости в зависимости от того, находится ли точка пространства в твердой или жидкой фазе или в «кашеобразном» состоянии область. Выбор теплоемкости в пределах интервалов подробно поясняется ниже.

Этот тип алгоритма применим только тогда, когда изменение фазы происходит в пределах конечного температурного интервала. Если моделируемый материал таков, что изменение фазы происходит в пределах очень резкого температурного интервала, этот метод может оказаться неподходящим.

Для модели изменения фазы затвердевания, которую использует Элмер, нам нужна энтальпия. Энтальпия определяется как

$$H(T) = \int_0^T \rho_{\text{ср}} + \rho L f \frac{1}{\lambda} d\lambda, \quad (1.5)$$

где $f(T)$ — доля жидкого материала в зависимости от температуры, а L — скрытая теплота.

Кривая энтальпии-температуры используется для расчета эффективной теплоемкости, после чего уравнения становятся идентично уравнению теплопроводности. Существует два способа вычисления эффективной теплоемкости в Элмере:

$$c_{\text{р,эфф}} = \frac{H}{T}, \quad (1.6)$$

и

$$c_{\text{р,эфф}} = \frac{H \cdot H}{T \cdot T}^{1/2}. \quad (1.7)$$

Первый метод используется только в том случае, если локальный градиент температуры очень мал, тогда как второй является предпочтительным. метод. В переходных симуляциях используется третий метод, заданный формулой

$$c_{\text{р,эфф}} = \frac{H / \Delta t}{T / \Delta t}. \quad (1.8)$$

Обратите внимание, что для текущей реализации уравнения теплопроводности теплоемкость и энтальпия являются аддитивными. Поэтому если теплоемкость присутствует в командном файле, ее не следует включать в энтальпию как интеграл.

1.2.4 Дополнительные источники тепла

В настоящее время фрикционный нагрев рассчитывается как для несжимаемых, так и для сжимаемых жидкостей по источнику тепла

$$h_f = 2\mu e : e. = \quad (1.9)$$

В случае наличия токов в среде может потребоваться также резистивный нагрев.

Джоулево тепло тогда определяется как

$$g_m = \frac{1}{\sigma} \text{ Дж} \cdot \text{ Дж}. \quad (1.10)$$

В приведенных выше уравнениях B и E — магнитное и электрическое поля соответственно. Плотность тока J равна определяется как

$$J = \sigma(E + u \times B). \quad (1.11)$$

При моделировании биологической ткани, перфузируемой кровью, действующей как поглотитель тепла, дополнительный источник тепла. Необходимо уравнение Пеннесса Биотепла. Термин

$$h_b = c_b \rho_b w (T_b - T) \quad (1.12)$$

где c_b — удельная теплоемкость, ρ_b — плотность, T_b — температура крови. Скорость перфузии w — объем крови, протекающий через единицу объема ткани в секунду. Этот дополнительный исходный член моделируется так, что часть, включающая T , обрабатывается неявно для лучшей сходимости. Несмотря на то, что модель был написан для биологического применения с учетом того, что дополнительный источник тепла может найти и другие применения.

1.2.5 Граничные условия

Для температуры можно применить граничные условия и задать либо температуру, либо тепловой поток.

Граничное условие Дирихле (температура задана) имеет вид

$$T = T_b. \quad (1.13)$$

Значение T_b может быть постоянным или зависеть от времени, положения или других переменных.

Тепловой поток в зависимости от коэффициента теплопередачи α и внешней температуры $T_{\text{Текст}}$ можно записать как

$$k \frac{T}{n} = \alpha (T - T_{\text{Текст}}). \quad (1.14)$$

Обе переменные α и $T_{\text{Текст}}$ могут быть константами или функциями времени, положения или других переменных. Если теплопередача Коэффициент α равен нулю, это означает, что тепловой поток на границе тождественно равен нулю. Нейман граничное условие $k \frac{T}{n} = 0$ также используется в оси симметрии в 2D, осесимметричном или цилиндрическом проблемы.

Тепловой поток может состоять из идеализированного излучения, после чего

$$k \frac{T}{n} = \epsilon \sigma (T^4 - T_{\text{доб}}^4). \quad (1.15)$$

Выше σ — постоянная Стефана-Больцмана, а ϵ — излучательная способность поверхности. Излучательная способность и внешняя температура может быть постоянной или зависеть от времени, положения или других переменных.

Уравнение теплопроводности нелинейно при моделировании излучения. Нелинейный член в граничном условии

(1.15) можно линеаризовать следующим образом:

$$T^4 - T_{\text{доб}}^4 \approx (T^3 + T_{\text{Текст}} T^2 + T_{\text{доб}}^2 T + T_{\text{доб}}^3) (T - T_{\text{Текст}}), \quad (1.16)$$

где T — температура из предыдущей итерации. В качестве альтернативы можно использовать линеаризацию Ньютона. Последний обычно сходится быстрее, но может иметь меньший радиус сходимости.

Во многих задачах, связанных с тепловым излучением, геометрия такова, что объекты видят себя по крайней мере частично. Это предполагает использование факторов зрения

Если поверхность k получает излучение от других поверхностей в системе, то тепловой поток для Гебхарта Факторы модели

$$k_k \frac{T_k}{n_k} = \epsilon_k \sigma T_k^4 \sum_{j=1}^N \frac{1}{\text{Хорошо}} F_{ik} A_j T_j^4, \quad (1.17)$$

где индексы i и k относятся к поверхностям i и k , а параметры A_i и A_k — к удельной поверхности площади. Факторы F_{ik} являются факторами Гебхарта, а N представляет собой общее количество присутствующих излучающих поверхностей в системе. Модель излучения вычисляет векторы излучения J , которые связаны с потоком как

$$k_k \frac{T_k}{n_k} = \frac{\epsilon_k A_k}{D_{jk} (1 - \epsilon_k)} (p T_k^4 - J_k) \quad (1.18)$$

«Излучатель» — точечный источник, излучающий энергию, создающий поток

$$k \frac{T}{n} = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (1.19)$$

где P_i — мощность источника, а a_i — вектор геометрических факторов, задающий долю энергии, падающей на заданный граничный элемент. Факторы учитывают ориентацию граничного элемента относительно источников и затенение. Обратите внимание, что этот тип источника недоступен в цилиндрически симметричных случаях.

Можно также ввести дополнительный термин теплового потока:

$$k \frac{T}{n} = d. \quad (1.20)$$

1.3 Ключевые слова

Константы

Стефан Больцманн **Реал**

Значение постоянной Стефана-Больцмана, необходимое для теплового излучения.

Моделирование

В разделе моделирования приведены данные случай-контроль:

Тип моделирования **Строка**

Уравнение теплопроводности может быть как переходным, так и стационарным.

Строка системы координат

Определяет используемую систему координат: декартова 1D, декартова 2D, декартова 3D, полярная 2D, полярная 3D, цилиндрическая, цилиндрически симметричная и осесимметричная.

Метод временного шага **Строка** Возможные

значения этого параметра: Newmark (необходимо задать дополнительный параметр Newmark Beta), BDF (необходимо задать порядок BDF). Также в качестве сокращения к методу Newmark со значениями Beta= 0.0, 0.5, 1.0 могут быть заданы ключевые слова Explicit Euler, Crank-Nicolson и Implicit Euler соответственно. Рекомендуемым выбором для временного интегрирования первого порядка является метод BDF порядка 2.

Целочисленное значение порядка

BDF может находиться в диапазоне от 1 до 5.

Ньюмарк Бета **Реал**

Значение в диапазоне от 0,0 до 1,0. Значение 0,0 соответствует явному методу интегрирования Эйлера, а значение 1,0 соответствует неявному методу Эйлера.

Solver resolver id Раздел Solver

определяет переменные управления Solver уравнения. Большинство возможных ключевых слов – например, связанных с линейной алгеброй – являются общими для всех Solver и объясняются в другом месте.

Строка уравнения [Уравнение теплопроводности]

Имя уравнения. Если это уравнение теплопроводности, то старая логика определит следующее ключевое слово.

Файл процедуры "HeatSolve" "HeatSolver"

Название процедуры для уравнения теплопроводности. Оно должно быть указано так, как указано здесь.

Переменная строка [Температура]

Это может быть любое название для температуры, если оно используется последовательно в другом месте. Имя по умолчанию — Температура.

Нелинейная система Сходимость Допуск **Действительный**

Критерий прекращения нелинейной итерации после того, как относительное изменение нормы полевой переменной между двумя последовательными итерациями достаточно мало

$$||T_i - T_{i-1}|| < ||V_i||,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Нелинейная система, максимальное число итераций . Целое число.

Максимальное количество нелинейных итераций, которые разрешено выполнить решателю.

Нелинейная система Ньютона после итераций `Integer`

Изменить тип нелинейного решателя на итерацию Ньютона после выполнения ряда итераций Пикара. Если заданный допуск сходимости между двумя итерациями достигнут до того, как будет достигнуто количество итераций, он вместо этого переключит тип итерации. В уравнении теплопроводности итерации Пикара означают, что член излучения факторизуется до линейных и третьей степени членов.

Нелинейная система Ньютон после допуска `Действительный`

Изменить тип нелинейного решателя на итерацию Ньютона, если относительное изменение нормы полевой переменной удовлетворяет критерию допуска:

$$||T_i - T_{i-1}|| < ||V_i||,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Nonlinear System Relaxation Factor `Real` Присвоение этого ключевого слова

запускает использование релаксации в решателе нелинейных уравнений. Использование фактора ниже единицы иногда требуется для достижения сходимости нелинейной системы. Фактор выше единицы может ускорить сходимость. Расслабленная переменная определяется следующим образом:

$$T_{я} = \lambda T_i + (1 - \lambda) T_{i-1},$$

где λ — фактор, заданный этим ключевым словом. Значение по умолчанию для фактора релаксации — единица.

Допуск сходимости устойчивого состояния `Real` С этим ключевым словом

задается допуск сходимости устойчивого состояния или связанной системы для конкретного уравнения. Все активные решатели уравнений должны соответствовать собственным допускам, прежде чем вся система будет считаться сошедшейся. Критерий допуска:

$$||T_i - T_{i-1}|| < ||V_i||,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Stabilize `Logical` Если этот флаг

установлен в значение `true`, решатель будет использовать стабилизированный метод конечных элементов при решении уравнения теплопроводности с конвективным членом. Если этот флаг установлен в значение `False`, вместо него используется стабилизация RFB (Residual Free Bubble) (если только следующий флаг `Bubbles` не установлен в значение `False` в задаче с декартовой системой координат). Если доминирует конвекция, для успешного решения уравнения необходимо использовать стабилизацию. Значение по умолчанию — `False`.

Bubbles `Logical` Существует

также формулировка стабилизированного метода конечных элементов без остатков и пузырьков. Она более точна и не включает в себя никаких специальных терминов. Однако она может быть более затратной в вычислительном отношении. Значение по умолчанию — `True`. Если и `Stabilize`, и `Bubbles` или установлены в `False`, стабилизация не используется. Обратите внимание, что в этом случае результаты могут легко оказаться бессмысленными.

Управление интеллектуальным нагревателем после допуска `Real`

Управление интеллектуальным нагревателем не следует активировать до тех пор, пока решение не стабилизируется. По умолчанию управление интеллектуальным нагревателем включается, когда для уравнения температуры включается ньютоновская линеаризация. Иногда может быть полезно иметь более строгие условия для включения управления интеллектуальным нагревателем, и тогда это ключевое слово может использоваться для задания допуска.

Применить ограничитель `логический`

Общие мягкие ограничители могут применяться для уравнения теплопроводности. Например, они могут учитывать эффекты изменения фазы в обстоятельствах, когда можно предположить, что температура не превышает температуру изменения фазы. При активном флаге учитываются минимальные и максимальные ограничители.

Источники излучения («излучатели») активируются с помощью следующих ключевых слов (см. также раздел «Граничные условия»). Также некоторые ключевые слова коэффициента видимости затенения подразделение/точность используются при разрешении затенения между источниками излучения и участвующими граничными поверхностями.

Координаты радиатора (n,3) Действительные

Активируйте n источников излучения, указав их координаты в пространстве.

Мощность радиатора реальная

Укажите мощность каждого из источников излучения, указанных с помощью ключевого слова «Координаты излучателя». Это может быть также вектор. Однако, если мощности имеют функциональную зависимость, например, от времени, лучше использовать отдельное ключевое слово Radiator Power i для каждого точечного источника.

Radiator Temperature Real Это ключевое слово

имеет эффект только при использовании спектральной модели излучения! В противном случае температура радиатора не имеет никакого эффекта. Также это может быть вектор. Однако, если мощности имеют функциональную зависимость, например, от времени, лучше использовать отдельное ключевое слово Radiator Temperature i для каждого точечного источника.

Вычислить коэффициенты радиатора Логический

Принудительное вычисление факторов радиатора, даже если факторы были ранее вычислены и сохранены в существующем файле. Например, можно установить этот флаг при изменении вычислительной сетки. Обратите внимание, что вы должны иметь возможность пересчитать факторы радиатора также вручную перед началом моделирования, просто вызвав двоичные Radiators. Значение по умолчанию — False, если факторы не существуют.

Обновить Факторы Радиатора Логические

Пересчет коэффициентов радиатора активируется установкой значения этого флага на True. Обратите внимание, что вы должны иметь возможность пересчитать коэффициенты радиатора также вручную перед началом моделирования, просто вызвав двоичные Radiators. False — значение по умолчанию.

В некоторых случаях геометрия границ излучения меняется. Это может потребовать перерасчета коэффициентов обзора. Для этой цели также включен динамический расчет коэффициентов, который контролируется ключевыми словами ниже. Коэффициенты обзора также автоматически вычисляются, если ни один коэффициент обзора не может быть загружен из файлов.

Обновление Просмотр Факторов Логический

Пересчет факторов вида активируется установкой значения этого флага в True. Обратите внимание, что вы также можете пересчитать факторы вида вручную перед началом моделирования, просто вызвав двоичные ViewFactors. False — значение по умолчанию.

Минимальный Фактор Видимости Реальный

Это ключевое слово определяет пороговое значение, при котором факторы вида опускаются. Пренебрежение малыми значениями не только экономит память, но и сделает матрицу, используемую для решения факторов Гебхарта, менее плотной. Это, следовательно, позволит использовать более эффективные стратегии разреженных матриц при решении факторов Гебхарта. Значение этого параметра может быть порядка 10e-8.

Вид Факторы Геометрия Допуск Реальный

Коэффициенты вида требуют много времени для вычисления. Поэтому во время итерации выполняется тест, чтобы проверить, изменилась ли геометрия. Если относительное максимальное изменение значений координат меньше значения, заданного этим параметром, коэффициенты вида не пересчитываются и используются старые значения.

Вид Факторы Исправлены После Итераций Целое

Иногда итерация изменяет геометрию границ излучения как нежелательный побочный эффект. Тогда геометрия на границе излучения может быть установлена фиксированной после нескольких итераций. На практике это делается путем добавления подходящих условий Дирихле в граничные условия.

Вид Факторы Фиксированный Допуск Реальный

Это ключевое слово определяет допуск связанной системы для уравнения теплопроводности, после которого перерасчет факторов вида опускается. Обычно это должно определяться допуском геометрии, но если решатель температуры следует изменениям геометрии, это может быть также хорошим контролем.

Симметрия Viewfactor x Логика

Мы можем заставить факторы вида быть симметричными. Код для вычисления факторов вида создает

Полная сетка внутри, но все остальные вычисления могут быть сделаны, предполагая симметричную геометрию. Также существуют ключевые слова Viewfactor Symmetry y и Viewfactor Symmetry z соответственно.

Viewfactor Divide Integer Для осесимметричного

вычисления viewfactor дает количество делений для каждого элемента. Значение по умолчанию — 1.

Viewfactor Combine Elements Logical Может быть значительно

экономлено время, если в вычислении осесимметричного view factor элементы, которые выровнены и имеют общий узел, будут объединены. Цикл затенения будет тогда выполняться только над этими макроэлементами.

Viewfactor Количество лучей Целое число

В 2D и 3D случаях затенение разрешается путем проецирования лучей между элементами. Это число лучей, отправленных между элементами при вычислении факторов вида. Оно также используется для «излучателей» при разрешении затенения между граничными элементами и источниками излучения. Значение по умолчанию — 1.

Фактор зрения Площадь Допуск Реальный

В 2D и 3D случаях затенение разрешается путем проецирования лучей между элементами. Эта настройка задает размер граничного участка, который не должен делиться на более мелкие части, даже если затенение для участка не определено (количество попаданий больше нуля или меньше количества лучей). Если используется допуск области, остановите рекурсивное деление, viewfactor умножается на hits/maxrays. Это ключевое слово также используется для «излучателей» при разрешении затенения между граничными элементами и источниками излучения. Значение по умолчанию — 1.

Фактор зрения Фактор Допуск Реальный

В 2D и 3D случаях затенение разрешается путем проецирования лучей между элементами. Эта настройка дает максимум вычисленного фактора, который принимается для граничного участка, даже если затенение для участка не определено (количество попаданий больше нуля или меньше количества лучей). затенение между граничными элементами и источниками излучения. Значение по умолчанию — 1.

Для задач излучения мы можем использовать либо факторы Гибхарта, либо модель излучательности. Факторы Гибхарта приводят к лучшей сходимости нелинейной системы, но требуют больших вычислительных затрат, чем модель излучательности. По умолчанию факторы Гибхарта вычисляются только один раз. Однако их можно обновить, если излучательная способность является функцией температуры. Также есть некоторые другие ключевые слова для управления их вычислением.

Обновление факторов Гибхарта Логическое

Если коэффициенты излучения зависят от решения, может потребоваться пересчет факторов Гибхарта. Это активируется установкой значения True для этого флага. Значение False используется по умолчанию. Факторы Гибхарта полностью вычисляются внутри ElmerSolver.

Минимальный Фактор Гибхарта Действительный

Факторы Гибхарта делают часть матрицы плотной. Пренебрегая наименьшими факторами Гибхарта, структура матрицы для уравнения теплопроводности может стать значительно более разреженной, и, таким образом, время решения может сократиться. Значение этого параметра также может быть порядка $10e-8$.

Неявный фактор Гибхарта Дробь Действительный При вычислении

задач теплопередачи с излучением неявным образом структура матрицы становится частично заполненной. Это влияет на производительность решателей линейных уравнений, а также увеличивает требования к памяти. С другой стороны, явная обработка излучения значительно замедляет сходимость. Это ключевое слово позволяет обрабатывать наибольшие факторы Гибхарта неявным образом, тогда как наименьшие обрабатываются явно. Значение должно находиться в диапазоне от нуля (полностью явно) до единицы (полностью неявно).

Топология матрицы Фиксированная логическая

Если факторы Гибхарта изменяют матричную структуру уравнения теплопроводности, возможно, также придется изменить, если только этот флаг не установлен на Ложь. Тогда все факторы, которые не сочетаются с матричной структурой, опускаются.

Факторы Гебхарта, фиксированные после итераций **Целое число** Иногда излучательная

способность зависит от температуры, но ее пересчет каждый раз может оказаться затратным.

С помощью этого ключевого слова перерасчет может быть ограничен заданным числом посещений решателя уравнения теплопроводности.

Вид Факторы Фиксированный Допуск **Реальный**

Это ключевое слово определяет допуск связанной системы для уравнения теплопроводности, после которого перерасчет факторов вида опускается. Обычно это должно определяться допуском геометрии, но если решатель температуры следует изменениям геометрии, это может быть также хорошим контролем.

Факторы Гебхарта Фиксированный Допуск **Реальный**

Это ключевое слово определяет допуск связанной системы для уравнения теплопроводности, после чего перерасчет факторов Гебхарта опускается. Температурная зависимость излучательной способности обычно не настолько сильна, чтобы небольшие изменения температуры привели к необходимости перерасчета факторов Гебхарта.

Другая модель для рассмотрения излучения — это использование векторов излучательности. Они не портят структуру матрицы и, таким образом, позволяют использовать все стратегии линейного решателя, обычно с хорошим успехом.

Также доступна спектральная версия. Поэтому модели излучательности часто должны быть методом выбора.

Модель радиосити **логическая**

Использовать модель излучения вместо модели по умолчанию, основанной на факторах Гебхарта.

Спектральная модель **логическая**

Спектральная модель — это разновидность модели излучения, в которой тепловое излучение в различных температурных интервалах рассматривается отдельно. Если этот флаг установлен в значение True, модель излучения активируется автоматически.

Spectral Dt Real Это параметр,

связанный со спектральной моделью излучения. Он описывает ширину температурных интервалов. Добавление большего количества интервалов требует затрат, поэтому, вероятно, значение, скажем, 20 K, может быть подходящим. Желательно, чтобы в пределах интервала излучательная способность не менялась слишком сильно.

Как факторы Гебхарта, так и модель излучательности требуют решения линейных систем. Для факторов Гебхарта количество линейных систем совпадает с количеством элементов излучающей поверхности. Они остаются постоянными для всего моделирования, если только не изменяется соответствующая часть геометрии и не требуется обновление факторов. Для излучательности с постоянной излучательной способностью количество линейных систем равно одной для каждой нелинейной итерации (двум при использовании линеаризации Ньютона), тогда как для спектральной модели количество линейных систем на нелинейную итерацию совпадает с количеством активных температурных интервалов, т. е. обычно несколько десятков.

Поскольку эти линейные системы часто решаются больше раз, чем линейная система, связанная с уравнением теплопроводности, часто важно оптимизировать скорость этих вычислений. Это особенно верно при использовании модели факторов Гебхарта, где обратная матрица вычисляется путем решения той же линейной системы n раз — прямой решатель, такой как MUMPS или UMFPACK, часто быстрее итерационных решателей, поскольку LU-разложение можно сохранить и использовать повторно. Для модели излучательности (и спектральной) итерационные решатели должны оставаться более быстрыми. Большинство ключевых слов линейной системы в принципе можно использовать здесь. Вот лишь некоторые из них.

излучение: линейная система ключевое слово

Иногда процедуры по умолчанию для вычисления факторов Гебхарта не подходят. Для этих целей пользователь может указать любую стратегию линейной системы, используя пространство имен radiation: и стандартные ключевые слова линейной системы. Экземпляр решателя создается на лету, и ключевые слова передаются ему без суффикса.

radiation: Linear System Solver **String** Если факторы излучения решаются из

разреженного матричного уравнения, также может быть выбран тип решателя. Часто итерационные стратегии (в отличие от прямых решателей) обеспечивают лучшую скорость с меньшим потреблением памяти. Это ключевое слово может использоваться для выбора между итеративными или прямыми решателями.

излучение: Линейная система Симметрично True Делает вычисление факторов

Гебхарта симметричным. Это можно сделать только если все излучательные способности меньше единицы. Когда система симметрична, доступны более экономичные линейные решатели.

излучение: Линейная система Положительно определенная Истина Если линейная система

сделана симметричной, она также положительно определена. Также это может использоваться некоторыми линейными решателями для большей эффективности.

Уравнение eq id Раздел

уравнений используется для определения набора уравнений для тела или набора тел.

Логическое уравнение теплопроводности. Если

установлено значение True, решите уравнение теплопроводности.

Строка конвекции Тип конвекции,

который будет использоваться в уравнении теплопроводности, один из следующих: Нет, Вычисляемый, Постоянный.

Строка модели изменения фазы Одна из: None,

Spatial 1, Spatial 2 и Temporal. Обратите внимание, что при моделировании затвердевания кривые энтальпии-температуры и вязкости-температуры должны быть определены в разделе материала.

Body Forces bf id Раздел body force

может использоваться для задания дополнительных силовых членов для уравнений. Базовый решатель распознает следующие ключевые слова:

Источник тепла Действительный

Источник тепла h для уравнения тепла может быть задан этим ключевым словом. Обратите внимание, что по умолчанию нагрев задается на единицу массы, а не на единицу объема.

Логическое ключевое слово Friction Heat

(Термтрение трением) в настоящее время является избыточным, автоматически добавляется фрикционный нагрев hf.

Джоуль Тепло Логический

Если установлено значение True, включает использование электромагнитного нагрева. Это ключевое слово учитывает нагрев многих различных решателей; электростатика, магнитостатика и уравнение индукции.

Логическое управление интеллектуальным нагревателем

Иногда предопределенный источник тепла не приводит к желаемой температуре. Часто температура контролируется обратной связью, и поэтому аналогичное управление нагревателем в симуляции может дать более реалистичные результаты. Этот флаг включает управление интеллектуальным нагревателем для заданной силы тела.

Реальный интегральный источник тепла Это

ключевое слово активирует нормализацию источника тепла, так что интегральная мощность нагрева является желаемой целью.

Нижний предел температуры Реальный

Нижний предел температуры, который применяется итеративно при применении мягких ограничителей.

Реальный верхний предел температуры

Верхний предел температуры, который применяется итеративно при применении мягких ограничителей.

Существует четыре дополнительных ключевых слова, связанных с уравнением биотепла Пеннесса, которые моделируют процесс перфузии.

Реальная скорость перфузии

Скорость перфузии w. Активирует процесс перфузии.

Референтная температура перфузии. Реальная температура Tb

перфузионной жидкости.

Плотность перфузии реальная

Плотность pb перфузионной жидкости.

Теплоёмкость перфузии. Реальная теплоёмкость c_b перфузионной жидкости.

Начальное состояние ic id

Раздел начальных условий может использоваться для установки начальных значений температуры.

Температура Реальная

Material mat id Раздел

материала используется для задания значений параметров материала. Следующие параметры материала могут быть эффективными при решении уравнения теплопроводности.

Density Real Значение

плотности задается этим ключевым словом. Значение может быть постоянным или переменным. Для сжимаемого потока плотность вычисляется внутренне, и это ключевое слово не имеет никакого эффекта.

Реальная энтальпия

Обратите внимание, что при использовании моделирования затвердевания необходимо задать кривую энтальпии-температуры. Энтальпия выводится по отношению к температуре, чтобы получить значение эффективной теплоемкости.

Вязкость Реальная вязкость

необходима, если учитывается вязкостный нагрев. При использовании моделирования затвердевания необходимо задать кривую вязкости-температуры. Вязкость должна быть установлена на достаточно высокое значение в диапазоне температур для твердого материала, чтобы эффективно установить скорость на ноль.

Теплоемкость Реальная Значение

теплоемкости при постоянном давлении c_p задается этим ключевым словом. Значение может быть постоянным или переменным. Для модели фазового перехода это значение изменяется в соответствии с правилами, приведенными в разделе теории.

Теплопроводность Реальная

Значение теплопроводности k задается этим ключевым словом. Значение может быть постоянным или переменным.

Скорость конвекции i Реальная скорость конвекции i

= 1, 2, 3 для модели постоянной конвекции.

Модель сжимаемости Реальная Этот параметр может

использоваться для задания модели сжимаемости для моделирования потока. Варианты выбора: Несжимаемый и Идеальный газ. Если выбран последний вариант, то может выполняться механическая работа при нагреве. Тогда также должны быть заданы параметры Опорное давление и Коэффициент удельной теплоты.

Реальное опорное давление

С помощью этого ключевого слова можно указать контрольный уровень давления.

Коэффициент удельной теплоемкости Реальный

Отношение удельных теплоемкостей (при постоянном давлении и постоянном объеме) может быть задано с помощью этого ключевого слова. Значение этого параметра по умолчанию — $5/3$, что является подходящим значением для одноатомного идеального газа.

Коэффициент излучения

Реальный коэффициент излучения излучающей поверхности, необходимый для модели излучения. Если коэффициент излучения не найден только в границе излучения, то он будет рассматриваться в свойствах материала родительских элементов. Часто нахождение коэффициента излучения здесь упрощает определение случая.

Transmissivity Real Для модели

диффузного серого излучения также может быть указана прозрачность поверхности. Она дает часть энергии, которая теряется при прохождении через стену. По умолчанию прозрачность равна нулю.

Поглощение Реальное Для моделей

излучательности мы можем использовать разные модели для излучательной способности и поглощательной способности. В противном случае поглощательная способность предполагается такой же, как излучательная способность.

Поглощающая способность излучателя **Реальные**

излучатели могут иметь другой спектр, не совместимый с теорией излучения черного тела.

Тогда температура радиатора не приводит к той же поглощающей способности, что и температура абсолютно черного тела. Это ключевое слово позволяет пользователю задать различную поглощающую способность для спектров радиатора при использовании спектральной модели.

Граничное условие **bc id**

Раздел граничных условий содержит значения параметров для различных типов граничных условий. В уравнении теплопроводности мы можем задать температуру непосредственно с помощью граничных условий Дирихле или использовать различные условия потока для температуры. Естественным граничным условием уравнения теплопроводности является условие нулевого потока.

Температура **Реальная**

Тепловой поток **BC Логический**

Необходимо установить значение True, если присутствует граничное условие теплового потока.

Реальный тепловой поток

Определенный пользователем термин теплового потока.

Коэффициент теплопередачи **реальный**

Определяет параметр α в граничном условии теплового потока типа

$$k = \alpha(T - T_{\text{Текст}}), \quad n$$

Внешняя температура **реальная**

Определяет переменную для температуры окружающей среды Текст в предыдущем уравнении.

Струнное излучение **Тип модели**

излучения для этой границы, один из следующих: «Нет», «Идеализированное», «Рассеянное серое».

Radiation Boundary **Integer** Если имеется много

замыканий с граничными условиями излучения, которые не видят друг друга, факторы видимости могут быть вычислены отдельно. Это ключевое слово используется для группировки границ в независимые наборы. Значение по умолчанию — один.

Радиационная граница открытая **логическая**

Затворы могут быть частично открыты. Тогда нормализация коэффициентов обзора не применяется. Недостающая часть угла излучения считается идеальным излучением. Поэтому, если эта опция применяется, также необходимо задать параметр Внешняя температура.

Radiation External Temperature **Real** В случае, если внешняя

температура, связанная с коэффициентом теплопередачи, отличается от температуры, связанной с излучением, они не могут быть заданы с тем же ключевым словом. Для этой цели предусмотрено альтернативное ключевое слово для проблем с излучением. Оно используется вместо него, если оно присутствует.

Коэффициент излучения

Реальный коэффициент излучения излучающей поверхности, необходимый для модели излучения. Если коэффициент излучения здесь не найден, он будет искаться в родительских элементах.

Пропускаемость **реальная**

Если коэффициент пропускания здесь не найден, он будет искаться в родительских элементах.

Radiator **BC Logical** Эта граница

излучается "излучателями". Нормаль поверхности определяется аналогично модели диффузного серого излучения (см. ключевое слово "Radiation Target Body"). По умолчанию 1 "False".

Целевое тело радиации

Этот флаг может использоваться для установки направления внешней нормали. Это используется при вычислении коэффициентов обзора. Если значение излучательной способности указано в разделе «Материал», то предполагается, что нормаль направлена наружу от материала, имеющего свойство. Если значение излучательной способности указано в разделе «Граничные условия», то направление нормали равно

ambiguous. Это ключевое слово затем может быть использовано для указания направления нормали путем указания материала, на который указывает нормаль. Значение -1 означает, что нормаль указывает наружу к несуществующему материалу (это также значение по умолчанию). Следовательно, это ключевое слово должно быть указано на внутренних неоднозначных границах или на внешних границах, где мы излучаем в домен.

Логическая граница интеллектуального нагревателя

Если активирован интеллектуальный нагреватель, то точкой для мониторинга температуры является точка с максимальной x -координатой на границе, где это ключевое слово установлено как True. В качестве альтернативы ищется логическая переменная Phase Change.

Умный обогреватель Реальная температура

Желаемая температура для системы интеллектуального нагревателя задается этим ключевым словом. В качестве альтернативы можно использовать реальную переменную Melting Point.

Приложение: Граничные условия внутреннего излучения

В этом приложении мы описываем граничное условие внутреннего излучения. Это граничное условие, где тело видит само себя, и условия становятся намного сложнее, чем при взаимодействии идеального пространства.

Граничные условия диффузного серого излучения с использованием факторов Гебхарта

На внешних границах твердого или жидкого тела, где температура не фиксирована, тепловой поток должен быть указан

$$q = \frac{T}{n} = D. \quad (1.21)$$

Поток q может зависеть от температур других границ системы, если присутствует лучистый обмен теплом. Модель, используемая здесь, — это модель диффузного серого излучения, которая означает, что поверхность излучает энергию во всех направлениях с одинаковой интенсивностью, и что интенсивность также не зависит от длины волны излучения. Используя эти предположения, мы можем записать тепловой поток для данной точки на поверхности, возникающий в результате излучения, как

$$q(x, T) = \sigma \epsilon(x) T^4 - \int \epsilon(y) G(y, x) T^4 dy. \quad (1.22)$$

где σ — постоянная Стефана-Больцмана, $\epsilon(x)$ — излучательная способность поверхности, а интеграл берется по всем поверхностям модели. Функция G — так называемый фактор Гебхарта. Фактор Гебхарта можно вычислить с помощью уравнения

$$G(y, x) = \int \epsilon(z) G(z, x) dA_z = F(y, x) \epsilon(x). \quad (1.23)$$

где функция F определяется следующим образом

$$F(y, x) = \frac{\int \epsilon(z) G(z, x) dA_z}{\epsilon(x)} \quad (1.24)$$

Углы находятся между нормальными поверхностями и линией, соединяющей точки, а H_{ij} — видимость. Функция F — это так называемый коэффициент обзора.

На практике поверхности модели делятся, скажем, на N конечных частей — граничных элементов. Эта дискретизация затем используется для вычисления коэффициентов вида и коэффициента Гебхарта для этих частей. Коэффициенты Гебхарта могут быть вычислены из уравнения

$$G = F(I - E)F^{-1}E, \quad (1.25)$$

где F — матрица коэффициентов обзора, а E — диагональная матрица излучательной способности поверхности. Записывая дискретную версию граничного условия, получаем

$$q_k = \sigma T_k^4 - \sum_{j=1}^N H_{kj} \sigma T_j^4. \quad (1.26)$$

Это уравнение все еще нелинейно и должно быть линеаризовано, чтобы решить уравнение на компьютере. Чтобы проиллюстрировать это, мы сначала покажем, как линеаризовать идеализированное граничное условие излучения вместо граничного условия диффузного серого излучения. Идеализированное граничное условие имеет вид

$$q_k = \sigma T_k^4 - \sum_{j=1}^N H_{kj} \sigma T_j^4. \quad (1.27)$$

Мы можем записать это несколько иначе, например:

$$q_k = \sigma T_k^4 - \sum_{j=1}^N H_{kj} \sigma T_j^4. \quad (1.28)$$

Если теперь взять $T = T_0$, температура из предыдущей итерации, в первом из членов произведения, мы имеем выражение, линейное по T . Это несколько странная линеаризация, не совсем метод Ньютона, но эффективная

в большей нечувствительности к первоначальному предположению температурного поля, чем метод Ньютона, при этом все еще имея гораздо лучшую скорость сходимости, чем метод фиксированной точки. Линеаризацию Ньютона также легко получить, записав разложение ряда Тейлора уравнения вокруг T и сохранив только постоянные члены и члены, линейные по T :

$$T_{n+1} = \sigma \epsilon (4T_{\text{экст}} - 3T_{\text{я}}) + T_{\text{я}} \quad (1.29)$$

Эта линеаризация имеет лучшую скорость сходимости, чем предыдущая, но за счет большей чувствительности к первоначальному предположению. Эти две линеаризации можно использовать последовательно, сначала сделав несколько шагов с первой линеаризацией, а затем переключиться на последнюю, когда сходимость будет на подходе.

Линеаризация граничного условия диффузного серого излучения очень похожа. Мы можем, например, использовать температуры из предыдущей итерации для вычисления «внешней» температуры

$$T_{\text{экст}} = \frac{1}{H_{\text{Хорошо}}} \left(\sum_{i=1}^N H_{\text{Гикси}} T_{\text{я}}^4 + H_{\text{Ай}} \right) \quad (1.30)$$

и использовать одно из предыдущих уравнений. Скорости сходимости этих методов имеют первый порядок, и обычно они используются только для того, чтобы дать начальное предположение для полной итерации Ньютона. Полный метод Ньютона может быть записан как

$$T_{k+1} = \sigma \epsilon k \left(4T_{\text{экст}} - 3T_{\text{я}} \right) + T_{\text{я}} \quad (1.31)$$

Факторы Гебхарта, вычисленные представленным здесь способом, предполагаются постоянными в пределах элементов, в то время как температуры из предыдущей итерации известны в узловых точках элементов. Члены типа $\alpha_i k_i T_{\text{я}}^4$ должны быть интегрированы по элементу i . Это делается с помощью правила интегрирования в одной точке и требует значений степеней температуры, удерживаемой в центре элемента. Для сохранения теплового потока сначала необходимо вычислить степени удерживаемой температуры в узловых точках, и только после этого интерполировать их в центр элемента, а не сначала интерполировать температуры и затем вычислять степени.

Граничное условие диффузного излучения с использованием радиосити

Когда теплопередача излучения между элементами поверхности зависит от спектральных свойств материалов, подход фактора Гебхарта становится громоздким. Кроме того, в противном случае факторы Гебхарта страдают от огромных вычислительных затрат, поскольку каждая строка в вычислении фактора Гебхарта требует решения линейной системы, в которой участвуют все элементы поверхности.

Альтернативный подход заключается в использовании концепции, называемой «радиоактивностью», которая представляет собой общую мощность излучения, покидающую поверхность. Для наших целей мы скорее ограничимся «излучением», т.е. излучением, приходящим на поверхность, но литература более развита для рассмотрения радиоактивности, поэтому мы используем ее здесь. Мы следуем гл. 5 в [1].

Давайте изучим энергетический баланс для граничного элемента i . Мощность излучения предполагается равной M_i , входящая освещенность E_i , тогда излучательность J_i определяется как

$$J_i = M_i + E_i \quad (1.32)$$

Предполагая, что параметры материала ϵ_i , α_i и ρ_i постоянны, вектор излучения J может быть решен из линейная система (уравнение (5.166) в ссылке при $\rho_i = 1 - \epsilon_i$)

$$[\delta_{ij} - \rho_i F_{ij}] J_j = \epsilon_i \sigma T_{\text{я}}^4 \quad (1.33)$$

или для наших целей в более удобной матричной форме

$$(rF - 1)J = -\epsilon \sigma T_{\text{я}}^4 \quad (1.34)$$

После решения задачи излучения J мы можем вычислить облученность из $E = FJ$ и поглощенный поток из αFJ , что после некоторых преобразований дает

$$T_{qa} = \sigma \frac{\alpha g_a}{\alpha} T^4 + \frac{a}{\Delta \epsilon + 1} \frac{a}{\alpha} \quad (1.35)$$

где мы определили отражательную способность с помощью поглощательной способности, $\epsilon = 1 - \alpha$. Излучаемая мощность все еще

$$q_e = \epsilon \sigma T^4 \quad (1.36)$$

Разделение потоков на два удобно, поскольку q_e — это стандартный поток излучения в открытое пространство, зависящий только от температуры поверхности, тогда как q_a — это поглощенное излучение, которое может зависеть от спектральной природы излучения.

Для повышения сходимости мы также вычисляем приблизительную оценку для dq_a/dT , которая используется для линеаризации Ньютона. Линеаризация зависит только от температуры самого элемента, и, следовательно, скорость сходимости нелинейной системы находится на одном уровне с методом фактора Гебхарта.

Излучательность для несерых границ

Когда излучательная и поглощательная способность зависят от температуры, нам нужно оставить условие серости, т.е. что разные фотоны взаимодействуют одинаково. Разные длины волн можно рассматривать отдельно. Однако здесь мы предполагаем, что каждая излучающая поверхность испускает излучение черного тела, связанное с ее собственной температурой. Кроме того, мы разбиваем температуру на дискретные температуры $T_k = k T$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Затем каждый источник взвешивается по

$$q_k(T) = \max(0, 1 - \text{abs}(T/T_k)). \quad (1.37)$$

Теперь суммируем вклад в q_a по одной температуре за раз,

$$[r(T_k)F - 1]J_k = q_k(T)\epsilon \sigma T^4. \quad (1.38)$$

и

$$q_a = \sum_k q_k(T) \sigma \frac{\alpha g_a}{\Delta \epsilon_k + 1} T^4 + \frac{a}{\alpha} \quad (1.39)$$

При суммировании вклада различных температур параметры α и ϵ необходимо оценивать при температуре интервала.

Вычисление коэффициентов обзора в 3D

Коэффициент обзора между двумя участками поверхности (граничными элементами) геометрической модели (сетки) определяется как

$$Жертва = \frac{1}{A_i} \sum_{A_j} \frac{\cos \varphi_i}{A_j} \frac{\cos \varphi_j}{A_j} \pi r_{ij}^2 \quad (1.40)$$

где A_i и A_j — площади участков i и j соответственно, φ_i и φ_j — углы между нормальными поверхностями в заданных точках и линией, соединяющей точки, а r — расстояние между двумя точками.

Наиболее проблематичным моментом в определении интеграла коэффициента видимости является оценка функции видимости H_{ij} . Значение функции H_{ij} равно единице, если между двумя точками нет препятствий, и нулю в противном случае. Факторы вида вычисляются для каждой пары участков поверхности в модели, так что в конечном итоге мы получаем матрицу F размером $N \times N$.

Отмечая, что

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (1.41)$$

позволяет фактически вычислить только половину факторов (или, в качестве альтернативы, использовать избыточную информацию, чтобы сделать вычисление фактора представления более точным).

В трехмерных случаях метод, используемый программой расчета фактора представления Элмера для оценки интеграла 1,40, представляет собой прямое численное интегрирование в сочетании с процедурой адаптивного подразделения, где элементы подразделяются на все более мелкие части, пока не будут выполнены указанные пользователем критерии. Затем вычисляется средневзвешенное значение площади факторов частей подразделенных участков. Подразделение

patches хранится в иерархическом хранилище, так что его не нужно повторять для каждой пары patches. Это подразделение также используется трассировщиком лучей, который используется для вычисления функции видимости.

Первый из критериев для прекращения процедуры интегрирования-подразделения выполняется, когда площади подразделяемых элементов достаточно малы. Этот критерий предотвращает бесконечное продолжение подразделения в областях, где подынтегральное выражение фактически разрывно (например, любой острый угол). Второй критерий для прекращения подразделения выполняется, когда сами коэффициенты вида становятся достаточно малыми. Этот критерий предотвращает ненужное подразделение областей, которые либо находятся далеко друг от друга, либо ориентированы так, что проекции их площадей друг на друга малы.

Функция N_{ij} вычисляется путем отправки ряда лучей из одного участка в другой и проверки, попадают ли они в какой-либо другой участок модели перед тем, как поразить цель. Это потенциально очень трудоемкая задача, так как в худшем случае для каждой пары граничных элементов все остальные граничные элементы модели должны быть проверены на предмет загромождения обзора между парой. Модуль трассировщика лучей предназначен для сокращения времени, затрачиваемого на вычисление пересечений, путем создания иерархического подразделения объема модели и назначения каждого элемента модели некоторым из этих подразделенных объемов на фиксированном уровне иерархии. Затем трассировщик лучей может проверить, попадет ли луч в ограничивающие рамки объемов, затем на второй уровень ограничивающих рамок и т. д., прежде чем в конечном итоге пройти через элементы, назначенные объему на последнем уровне иерархии. Может быть назначено только несколько элементов этому объему.

Когда видимость между двумя участками поверхности вызывает сомнения (некоторые лучи заблокированы, некоторые нет), выполняется дополнительный цикл подразделения. Когда подразделение в конечном итоге завершается, N_{ij} вычисляется как $N_{ij} = 1 - p_b/n$, где p_b — количество заблокированных лучей, а n — общее количество отправленных лучей.

Нормализация факторов зрения

Коэффициенты зрения, вычисленные, например, с помощью процедуры, описанной в предыдущем разделе, являются лишь приближительными. Для лучистого теплообмена в расчетах методом конечных элементов иногда важно гарантировать сохранение энергии. Сохранение энергии требует, чтобы в закрытой системе

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} = 1. \quad (1.42)$$

Вместе с уравнением симметрии это условие может быть использовано для нормализации факторов, чтобы энергия сохранялась. Обратите внимание, что это условие выполняется только для полностью замкнутых поверхностей.

Начнем с определения симметричной матрицы.

$$H_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} F_{ij} + A_{ji} F_{ji}). \quad (1.43)$$

Эту матрицу мы можем относительно легко масштабировать так, чтобы суммы строк (и, поскольку мы должны сохранить симметрию, также суммы столбцов) матрицы были равны соответствующим площадям участков поверхности, решая систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^N d_i H_{ij} = A_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.44)$$

где d_i — масштабные коэффициенты. Уравнение является квадратичным по d_i и может быть решено методом Ньютона. Полученная линейная система диагонально доминирующая и очень стабильная, поэтому не должно возникнуть никаких проблем с решением уравнения. После того, как масштабирование известно, мы можем вычислить нормализованные факторы по

$$F_{ij} = H_{ij} / d_i. \quad (1.45)$$

Библиография

[1] HD Baehr и K. Stephan. Тепло- и массообмен. Springer Berlin, Гейдельберг, 1998.

Модель 2

Уравнения Навье-Стокса

Имя модуля: FlowSolve

Подпрограммы модуля: FlowSolver

Авторы модуля: Юха Руоколайнен

Авторы документа: Юха Руоколайнен, Петер Рабак

2.1 Введение

В твердых и жидких материалах перенос тепла и течение вязкой жидкости регулируются уравнениями теплопроводности и Навье-Стокса, которые можно вывести из основных принципов сохранения массы, импульса и энергии. Жидкость может быть как ньютоновской, так и неньютоновской. В последнем случае рассмотрение в Элмере ограничивается чисто вязким поведением с использованием степенной модели.

Ниже мы представляем основные уравнения течения жидкости, теплопередачи и напряжений в упругом материале, применяемые в Элмере. Также описаны наиболее распространенные граничные условия, применяемые в вычислениях.

2.2 Теория

Уравнения импульса и непрерывности можно записать как

$$\rho \frac{du}{dt} + (u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot \sigma + f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (2.1)$$

и

$$-\nabla p + (u \cdot \nabla)p + \rho(u \cdot \nabla)u = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (2.2)$$

где σ — тензор напряжений. Для ньютоновских жидкостей

$$\sigma = 2\mu e + pI, \quad e = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (2.3)$$

где μ — вязкость, p — давление, I — единичный тензор, а e — линейризованный тензор скорости деформации, т.е.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Плотность идеального газа зависит от давления и температуры через уравнение состояния

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (2.5)$$

где R — газовая постоянная:

$$R = \frac{\gamma}{c} \quad (2.6)$$

Коэффициент удельной теплоемкости γ определяется как

$$c = \frac{c_p}{\rho}, \quad (2.7)$$

где c_p и c_v — теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно. Значение γ зависит исключительно от внутренних молекулярных свойств газа.

Несжимаемое течение характеризуется условием $\rho = \text{constant}$, из которого следует, что

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2.8)$$

Применяя ограничение (2.8) в (2.1), (2.2) и (2.3), уравнения сводятся к уравнениям Навье-Стокса

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2.10)$$

Сжимаемые течения моделируются уравнениями (2.1)-(2.7). Тогда уравнение состояния (2.5) можно заменить на

$$\rho = \frac{1}{2c} p, \quad (2.11)$$

где $c = c(p, T, \dots)$ — скорость звука. Уравнение (2.11) можно использовать и с жидкими материалами.

Чаще всего термин $\rho \mathbf{f}$ представляет силу, вызванную гравитацией, в этом случае вектор $\mathbf{f}$ является ускорением свободного падения. Он также может представлять, например, силу Лоренца, когда присутствуют магнитогидродинамические эффекты.

Для изотермических течений уравнения (2.9) и (2.10) полностью описывают систему. Для тепловых течений также необходимо решить уравнение теплопроводности.

Для термических несжимаемых потоков жидкости мы предполагаем, что приближение Буссинеска справедливо. Это означает, что плотность жидкости постоянна, за исключением члена объемной силы, где плотность линейно зависит от температуры через уравнение

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)), \quad (2.12)$$

где β — коэффициент объемного расширения, а индекс 0 относится к исходному состоянию. Если предположить, что гравитационное ускорение $\mathbf{g}$ является единственной внешней силой, то сила $\rho_0 \mathbf{g}(1 - \beta(T - T_0))$ вызывается в жидкости изменениями температуры. Это явление называется конвекцией Грасгофа или естественной конвекцией.

Можно выбрать между анализом переходного и стационарного состояния. В анализе переходного состояния нужно установить, кроме того, граничные условия, а также начальные значения для неизвестных переменных.

2.2.1 Граничные условия

Для уравнения Навье-Стокса можно применить граничные условия для компонент скорости или определить касательные или нормальные напряжения.

В двумерных или осесимметричных случаях граничное условие Дирихле для компонента скорости u_i просто

$$u_i = u_i^b. \quad (2.13)$$

Значение u_i^b может быть постоянной или функцией времени, положения или других переменных. В цилиндрических случаях Дирихле граничное условие для угловой скорости ω

$$\omega = \omega_0, \quad (2.14)$$

где ω_0 — скорость вращения.

В осесимметричных геометриях необходимо положить $u_r = 0$ и $uz/r = 0$ на оси симметрии. Если нет потока по поверхности, то

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (2.15)$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя единица нормали к границе.

Поверхностные напряжения можно разделить на нормальные и касательные. Нормальное напряжение обычно записывается в виде

$$\sigma_n = \frac{c}{R} - p_a \quad (2.16)$$

где γ — коэффициент поверхностного натяжения, R — средняя кривизна, а p_a — атмосферное (или внешнее) давление. Тангенциальное напряжение имеет вид

$$\mathbf{f} = -\gamma \nabla_s, \quad (2.17)$$

где ∇_s — оператор градиента поверхности.

Коэффициент γ является теплофизическим свойством, зависящим от температуры. Различия температур на поверхности влияют на перенос импульса и тепла вблизи поверхности. Это явление называется конвекцией Марангони или термокапиллярной конвекцией. Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения может быть аппроксимирована линейным соотношением:

$$\gamma = \gamma_0(1 - \beta(T - T_0)), \quad (2.18)$$

где β — температурный коэффициент поверхностного натяжения, а индекс 0 относится к исходному состоянию. Если принять гипотезу Буссинеска, т. е. коэффициент поверхностного натяжения постоянен, за исключением (2.17) из-за (2.18), граничное условие для касательного напряжения становится

$$\mathbf{f} = -\beta \gamma_0 \nabla T. \quad (2.19)$$

В уравнении (2.16) тогда выполняется, что $\gamma = \gamma_0$. Линейная температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения, естественно, является только одним из способов представления зависимости. Фактически, коэффициент γ может быть любой определяемой пользователем функцией в Elmer. Можно также задать вектор силы на границе напрямую, как в

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}. \quad (2.20)$$

2.2.2 Линеаризация

Как известно, конвективный транспортный член уравнений Навье-Стокса и уравнения теплопроводности является источником как физической, так и численной неустойчивости. Численная неустойчивость должна быть каким-то образом скомпенсирована для решения уравнений на компьютере. По этой причине в Элмере для дискретизации этих уравнений используется так называемый стабилизированный метод конечных элементов ([2],[1]).

Конвекционный член уравнений Навье-Стокса нелинейный и должен быть линеаризован для компьютера. Существуют две линеаризации конвективного члена в Элмере:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \approx (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (2.21)$$

и

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \approx (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}, \quad (2.22)$$

где $\mathbf{U}$ — вектор скорости из предыдущей итерации. Первый из методов называется итерацией Пикара или методом неподвижной точки, а последний — итерацией Ньютона. Скорость сходимости итерации Пикара имеет первый порядок, и сходимость может быть иногда очень медленной. Скорость сходимости метода Ньютона имеет второй порядок, но для успешного использования этого метода требуется хорошее начальное предположение для полей скорости и давления. Решение этой проблемы состоит в том, чтобы сначала выполнить пару итераций Пикара и переключиться на итерацию Ньютона после начала сходимости.

2.2.3 Произвольные лагранжево-эйлеровы (ALE) координаты

Для задач, включающих деформации, переходное уравнение Навье-Стокса должно быть решено с использованием произвольной системы отсчета Лагранжа-Эйлера (ALE). Предположим, что скорость сетки во время нелинейной итерации равна c . Тогда конвективный член дает

$$((u - c) \cdot \nabla) u - ((U - c) \cdot \nabla) u. \quad (2.23)$$

Это естественным образом приводит к итерации Пикара. Для итерации Ньютона два дополнительных члена остаются теми же, поскольку скорости сетки в них отменяют друг друга.

2.2.4 Неньютоновские модели материалов

Существует несколько неньютоновских материальных моделей. Все они являются функциями скорости деформации $\dot{\gamma}$. Простая модель степенного закона имеет проблемное поведение при низких скоростях сдвига. Более сложные модели обеспечивают плавный переход от низких к высоким скоростям сдвига.

Закон силы

$$\tau = \begin{cases} \eta_0 \dot{\gamma}^{n-1} & \text{если } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0, \\ \eta_0 \dot{\gamma}_0^{n-1} & \text{если } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0. \end{cases} \quad (2.24)$$

где η — константа, $\dot{\gamma}_0$ — критическая скорость сдвига, а n — показатель вязкости.

Карро-Ясуда

$$\eta = \eta_\infty + \Delta\eta (1 + (c\dot{\gamma})^y)^{-\frac{n-1}{y}}, \quad (2.25)$$

где η_∞ — вязкость при высокой скорости сдвига $\dot{\gamma}$ при условии, что $n < 1$. Для скоростей сдвига, приближающихся к нулю, вязкость равна $\eta_0 = \eta_\infty + \Delta\eta$. Таким образом, $\Delta\eta$ — это максимальная разница вязкости между низкой и высокой скоростью сдвига. Эта модель восстанавливает простую модель Карро, когда показатель Ясуды $y = 2$.

Крест

$$\eta = \eta_\infty + 1 + \frac{\Phi\eta}{c\dot{\gamma}^n}, \quad (2.26)$$

где снова η_∞ — вязкость при высокой скорости сдвига.

Пауэлл-Эйринг

$$\eta = \eta_\infty + \eta_0 c\dot{\gamma} \frac{\operatorname{asinh}(c\dot{\gamma})}{\eta}. \quad (2.27)$$

Все модели вязкости можно сделать зависимыми от температуры. Текущий выбор — умножить предлагаемую вязкость на коэффициент $\exp(d(1/(T_0 + T) - 1/Tr))$, где d — экспоненциальный коэффициент, T_0 — температурное смещение (чтобы можно было использовать градусы Цельсия), а Tr — опорная температура, для которой коэффициент становится равным один.

2.2.5 Течение в пористой среде

Простая модель пористой среды представлена в решателе Навье-Стокса. Она использует закон Дарси, который гласит, что сопротивление потоку пропорционально скорости, и, таким образом, модифицированное уравнение импульса читается как

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}, \quad (2.28)$$

где $\mathbf{g}$ — пористое удельное сопротивление, которое также может быть ортотропным тензором. Обычно заданным параметром является проницаемость, которая является обратной величиной удельного сопротивления, как определено здесь. Никакие другие особенности потока пористой среды не принимаются во внимание. Обратите внимание, что для больших значений $\mathbf{g}$ обнаруживается, что работает только стабилизация пузырьков.

2.2.6 Вращение координат

Во вращающейся системе координат вокруг начала координат можно определить вектор угловой скорости, Ω . Вращение Ω вводит дополнительные силы, которые можно оценить по следующей формуле:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{u} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}). \quad (2.29)$$

В численных реализациях используется следующая формула Лагранжа

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}) = (\Omega \cdot \mathbf{x})\Omega - (\Omega \cdot \Omega)\mathbf{x}. \quad (2.30)$$

что приводит к следующей форме уравнения Навье-Стокса во вращающихся координатах

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + 2\rho\Omega \times \mathbf{u} = \rho(\Omega \cdot \Omega)\mathbf{x} - \rho(\Omega \cdot \mathbf{x})\Omega + \rho \mathbf{f}, \quad (2.31)$$

Следует отметить, что теперь также необходимо задать граничные условия во вращательной системе координат.

2.2.7 Связь с электрическими полями

В электрокинетике жидкость может иметь заряды, которые связаны с внешними электрическими полями. Это приводит к внешней силе, которая имеет форму

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{\phi}, \quad (2.32)$$

где ρ_e — плотность заряда, а $\mathbf{\phi}$ — внешнее электрическое поле. Плотность заряда также может быть переменной. Более конкретно, эта сила может быть использована для связывания уравнения Навье-Стокса с уравнением Пуассона-Больцмана, описывающим распределение заряда в электрических двойных слоях. Также могут быть рассмотрены другие типы сил, пропорциональные градиенту поля.

2.2.8 Связь с магнитными полями

Если жидкость имеет свободные заряды, она может взаимодействовать с магнитным полем. Силовой член, индуцированный магнитным полем, для уравнений импульса потока определяется как

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.33)$$

Здесь $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ — магнитное и электрическое поля соответственно. Плотность тока $\mathbf{J}$ определяется как

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.34)$$

2.3 Ключевые слова

Константы

Гравитация Размер 4 Действительный [xyz abs]

Вышеприведенное утверждение дает действительный вектор, длина которого равна четырем. В этом случае первые три компонента дают вектор направления силы тяжести, а четвертый компонент дает ее интенсивность.

Solver resolver id Обратите

внимание, что все ключевые слова, относящиеся к линейному решателю (начиная с Linear System), могут использоваться и в этом решателе. Они определены в другом месте.

Строка уравнения [Навье-Стокса]

Имя уравнения. Если это Навье-Стокса, то старая логика определит следующее ключевое слово.

Файл процедуры "FlowSolve" "FlowSolver"

Название процедуры для уравнения Навье-Стокса. Оно должно быть указано здесь.

Решение для переменного потока струны [Скорость:3 Давление:1]

Это имя поля скорости по умолчанию в 3D, для 2D замените и измените количество компонентов скорости. Пользователь может указать это в основном, если ему нужны несколько полей потока в рамках одной симуляции.

Строка модели потока [Полная][Без конвекции][Стокса]

Модель потока, которая будет использоваться. По умолчанию в модель включены как конвективные, так и производные по времени члены. Модель «Без конвекции» отключает конвективные члены, а модель «Стокса» отключает как конвективные члены, так и (явные) производные по времени члены.

Нелинейная система Сходимость Допуск Действительный

это ключевое слово дает критерий для прекращения нелинейной итерации после того, как относительное изменение нормы переменной поля между двумя последовательными итерациями станет достаточно малым

$$||u_i - u_{i-1}|| < ||u_i||,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Нелинейная система, максимальное число итераций . Целое число.

Максимальное количество нелинейных итераций, которые разрешено выполнить решателю.

Нелинейная система Ньютона после итераций Integer

Изменить тип нелинейного решателя на итерацию Ньютона после выполнения ряда итераций Пикара. Если заданный допуск сходимости между двумя итерациями достигнут до того, как будет достигнуто количество итераций, он вместо этого переключит тип итерации.

Нелинейная система Ньютон после допуска Действительный

Изменить тип нелинейного решателя на итерацию Ньютона, если относительное изменение нормы полевой переменной удовлетворяет критерию допуска:

$$||u_i - u_{i-1}|| < ||u_i||,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Nonlinear System Relaxation Factor Real Присвоение этого ключевого слова

запускает использование релаксации в решателе нелинейных уравнений. Использование фактора ниже единицы иногда требуется для достижения сходимости нелинейной системы. Фактор выше единицы может ускорить сходимость. Расслабленная переменная определяется следующим образом:

$$u_{i+1} = \lambda u_i + (1 - \lambda) u_{i-1},$$

где λ — фактор, заданный этим ключевым словом. Значение по умолчанию для фактора релаксации — единица.

Допуск сходимости устойчивого состояния Real С этим ключевым словом

задается допуск сходимости устойчивого состояния или связанной системы для конкретного уравнения. Все активные решатели уравнений должны соответствовать собственным допускам, прежде чем вся система будет считаться сошедшейся. Критерий допуска:

$$||u_i - u_{i-1}|| < ||u_i||,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Stabilize Logical Если этот флаг

установлен в значение true, решатель будет использовать стабилизированный метод конечных элементов при решении уравнений Навье-Стокса. Обычно стабилизация уравнений должна быть выполнена для успешного решения уравнений. При решении сжимаемых уравнений Навье-Стокса формулировка пузырьковой функции используется вместо стабилизированной формулировки независимо от настройки этого ключевого слова.

Также для несжимаемых уравнений Навье-Стокса пузырьки можно выбрать, установив этот флаг на Ложь.

Div Discretization Logical В случае несжимаемого

потока использование данной формы дискретизации уравнения может привести к более устойчивой дискретизации при увеличении числа Рейнольдса.

Gradp Дискретизация *Логическая*

При такой форме дискретизации давления можно использовать граничные условия Дирихле (и уровень давления должен быть зафиксирован таким условием). Также доступен поток массы как естественное граничное условие.

Уравнение *eq id*

Раздел уравнений используется для определения набора уравнений для тела или набора тел:

Навье-Стокса *Логический*

если установлено значение True, решить уравнения Навье-Стокса.

Логическое уравнение магнитной индукции **Если**

установлено значение True, решается уравнение магнитной индукции вместе с уравнениями Навье-Стокса.

Конвективная строка [Нет, Вычисляется, Постоянна]

Тип конвекции, который будет использоваться в уравнении теплопроводности, один из следующих: Нет, Вычисляемый, Постоянный. Второй вариант используется для тепловых потоков.

Раздел «Теловидная сила»

можно использовать для задания дополнительных силовых членов для уравнений.

Буссинеск *Логический*

Если установлено значение true, включается модель Буссинеска.

Flow BodyForce i *Real*

Может использоваться для задания дополнительной объемной силы для уравнений импульса потока, $i=1,2,3$.

Логическая сила Лоренца. **Если**

установлено значение true, активируется сила магнитного поля для уравнений импульса потока.

Потенциальная сила *Логическая*

Если установлено значение true, активируется сила, используемая для электростатической связи.

Потенциальное поле *Реальное*

Поле, градиенту которого пропорциональна внешняя сила. Например, электростатическое поле.

Потенциальный коэффициент *Действительный*

Коэффициент, на который умножается градиентный член. Например, плотность заряда.

Угловая скорость *действительная*

Угловая скорость Ω , используемая для вращающихся систем координат. Размер всегда ожидается равным трем.

Начальное состояние *ic id*

Раздел начальных условий может использоваться для установки начальных значений для переменных поля. Следующие переменные являются активными:

Давление *Реальное***Скорость i** *Действительная*

Для каждого компонента скорости $i=1, 2, 3$.

Кинетическая энергия *действительная*

Для модели турбулентности $k-\epsilon$.

Диссипация кинетической энергии *Реальная***Material mat id** **Раздел**

материала используется для задания значений параметров материала. Следующие параметры материала могут быть установлены в уравнении Навье-Стокса.

Density *Real* Значение плотности задается этим ключевым словом. Значение может быть постоянным или переменным. Для сжимаемого потока плотность вычисляется внутренне, и это ключевое слово не имеет никакого эффекта.

Вязкость Реальная Связь

между напряжением и скоростью деформации. При использовании моделирования затвердевания необходимо задать кривую вязкости-температуры. Вязкость должна быть установлена на достаточно высокое значение в диапазоне температур для твердого материала, чтобы эффективно установить скорость на ноль.

Реальная опорная температура Это опорная

температура для модели Буссинеска температурной зависимости плотности.

Коэффициент теплового расширения реальный

Для модели Буссинеска коэффициент теплового расширения должен быть задан с помощью этого ключевого слова. Значение по умолчанию — 0,0.

Приложенное магнитное поле i Real Приложенное

магнитное поле может быть задано с помощью следующих ключевых слов, где $i=1,2,3$.

Строка модели сжимаемости

Эта настройка может использоваться для установки модели сжимаемости для моделирования потока. В настоящее время настройка может быть установлена на Incompressible, Perfect Gas и ArtificialCompressible. Если выбрана модель идеального газа, то необходимо также задать параметры Reference Pressure и Specific Heat Ratio. Модель искусственной сжимаемости может использоваться для повышения сходимости в случаях взаимодействия жидкости и структуры. Значение этого параметра по умолчанию — Incompressible.

Реальное опорное давление

с этим ключевым словом может быть задан опорный уровень давления. Эта настройка применяется только в том случае, если Модель сжимаемости установлена на значение Идеальный газ.

Коэффициент удельной теплоемкости Реальный

Отношение удельных теплоемкостей (при постоянном давлении и постоянном объеме) может быть задано с помощью этого ключевого слова. Эта настройка применяется только в том случае, если для модели сжимаемости установлено значение Perfect Gas. Значение этой настройки по умолчанию — 5/3, что является подходящим значением для одноатомного идеального газа.

Для модели турбулентности к-ε параметры модели также могут быть заданы в разделе материалов с использованием следующих ключевых слов:

KE СигмаK Реал [1.0]

KE СигмаЭ Реальный [1.3]

KE C1 Реал [1,44]

KE C2 Реал [1,92]

TO Cmu Real [0.09]

Неньютоновские материальные законы также определены в разделе материалов. Для степенного закона постоянный коэффициент задается ключевым словом Вязкость.

Строка модели вязкости

Возможные варианты: степенной закон, Карро, крест, Пауэлл-Эйринг и тепловой закон Карро.

Если ничего не указано, жидкость считается ньютоновской.

Действительный показатель вязкости

Параметр n в моделях степенного закона, Карро, Кросс

Разница вязкости Реальная разница η

между вязкостями при высокой и низкой скорости сдвига. Применимо к моделям Карро, Кросса и Пауэлла-Эйринга.

Реальный переход вязкости

Параметр c в моделях Карро, Кросса и Пауэлла-Эйринга.

Критическая скорость сдвига действительная [0,0]

Необязательный параметр γ_0 в модели степенной вязкости.

Номинальная скорость сдвига *действительная* [0,0]

Необязательный параметр в модели степенной вязкости, задающий скорость сдвига, которая возвращает простую ньютоновскую вязкость.

Ясуда Экспонента *Действительная*

Необязательный параметр y в модели Карро. Значение по умолчанию — 2. Если активирован, модель становится более общей моделью Ясуды-Карро.

Viscosity Temp Offset *Real Parameter To* в

зависимости тепловой вязкости. При использовании Цельсия вместо Кельвина это будет 273,15, например.

Вязкость Темп Реф *Реал*

Параметр T_g в зависимости тепловой вязкости. Его следует задать так, чтобы получить единичный фактор при $T_g = T_o + T$.

Вязкость Темп Эксп *Действительный*

Экспоненциальный параметр d в зависимости тепловой вязкости.

Пористость определяется свойствами материала

Пористая среда *Логика*

Если это ключевое слово установлено как `True`, то пористая модель будет активна в материале.

Пористое сопротивление *Реальное*

Это ключевое слово может давать постоянное сопротивление или также ортотропное сопротивление, где сопротивление каждого компонента скорости задается отдельно.

Граничное условие *bc id*

Раздел граничных условий содержит значения параметров для различных типов граничных условий.

Граничные условия Дирихле могут быть установлены для всех первичных переменных поля. Те, которые связаны с уравнением Навье-Стокса, являются

Скорость i . *Действительные*

граничные условия Дирихле для каждой компоненты скорости $i = 1, 2, 3$.

Давление *Реальное*

Абсолютное давление.

Нормально-тангенциальная скорость *Действительная*

Условия Дирихле для векторных переменных можно задать в нормально-тангенциальной системе координат вместо системы, направленной по осям координат, с помощью ключевых слов

Поток Силы ВС *Логический*

Установите значение `true`, если для уравнений Навье-Стокса существует граничное условие силы.

Коэффициент расширения поверхностного натяжения *Действительный*

Запускает граничное условие касательного напряжения, которое будет использоваться. Если задано ключевое слово `Surface Tension Expansion Coefficient`, предполагается линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Обратите внимание, что это граничное условие является тангенциальной производной коэффициента поверхностного натяжения

Коэффициент поверхностного натяжения *Действительный*

Запускает ту же физическую модель, что и предыдущая, за исключением того, что не предполагается линейность. Предполагается, что значение явно содержит зависимость.

Внешнее давление *реальное*

Граничное условие давления, направленное нормально к поверхности.

Давление i *Реальное*

Сила давления в заданном направлении $i = 1, 2, 3$.

Логический параметр свободной поверхности

Указывает свободную поверхность.

Свободное перемещение

Логический Указывает, может ли регенерация сетки свободно перемещать узлы заданной границы при перестроении после перемещения узловых точек свободной поверхности. По умолчанию граничные узлы фиксированы.

Модель турбулентности k-ε также имеет свой собственный набор ключевых слов граничных условий (в дополнение к Настройки Дирихле):

Логический закон стены

Флаг активирует закон (Рейхардта) стены для указанной границы. Значение по умолчанию — 9,0.

Толщина пограничного слоя *действительная*

Расстояние от граничного узла сетчатой области до физической стены.

Библиография

[1] LP Franca и SL Frey. Компьютерные методы в прикладной механике и машиностроении, 99:209–233, 1992 год.

[2] LP Franca, SL Frey и TJR Hughes. Компьютерные методы в прикладной механике и машиностроении, 95:253–276, 1992.

Модель 3

Уравнение адвекции-диффузии

Имя модуля: AdvectionDiffusion

Подпрограммы модуля: AdvectionDiffusionSolver

Авторы модуля: Юха Руоколайнен, Вилле Саволайнен, Антти Пурсула

Авторы документа: Вилле Саволайнен, Антти Пурсула

3.1 Введение

Уравнение адвекции-диффузии (иногда называемое уравнением диффузии-конвекции) описывает перенос скалярной величины или химического вещества посредством конвекции и диффузии. Разница в номенклатуре обычно указывает на то, что адвективное количество не оказывает влияния на поле скорости общего потока жидкости, а конвективное количество оказывает. Уравнение адвекции-диффузии выводится из принципа сохранения массы каждого вещества в смеси жидкостей. Уравнение адвекции-диффузии может иметь источники или стоки, и несколько уравнений адвекции-диффузии могут быть связаны между собой посредством химических реакций.

Для моделирования диффузионного потока используется закон Фика. Диффузия может быть анизотропной, что может быть физически обосновано, по крайней мере, в твердых телах. Если поле скорости тождественно равно нулю, уравнение адвекции-диффузии сводится к уравнению диффузии, которое применимо в твердых телах.

Уравнение теплопроводности является частным случаем уравнения адвекции-диффузии (или диффузии-конвекции), и оно имеет вид описаны в другом месте данного руководства.

3.2 Теория

3.2.1 Основные уравнения

Уравнение адвекции-диффузии может быть, в общем, выражено в терминах относительной или абсолютной массы или молярных концентраций. В Элмере, когда транспортируемое количество переносится несжимаемой жидкостью (или оно диффундирует в твердом теле), используется относительная массовая концентрация $c_i = C_i/\rho$ для вида i (C_i — абсолютная массовая концентрация в единицах кг/м³, а ρ — общая плотность смеси). Мы использовали приближение, действительное для разбавленных многовидовых потоков, т. е. $\rho \approx \rho_0$.

1. Уравнение адвекции-диффузии теперь записывается как

$$\rho \frac{dc_i}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) c_i = \rho \cdot (D_i \nabla^2 c_i) + S_i \quad (3.1)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость адвекции, D_i — коэффициент диффузии, а S_i — источник, сток или реакционный член. Коэффициент диффузии может быть тензором.

Для сжимаемой жидкости концентрация должна быть выражена в абсолютных единицах массы, а адвекция - уравнение диффузии читается

$$\frac{dC_i}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) C_i + (\mathbf{v} \cdot \nabla) C_i = \nabla \cdot (D_i \nabla C_i) + D_a \quad (3.2)$$

Для ситуации, когда количество переносится через границу фазового перехода, удобно масштабировать формулу абсолютной массы по соответствующим растворимостям различных фаз. Таким случаем является, например, поверхность жидкости, где перенесенное количество испаряется в газообразное вещество. Масштабированная переменная концентрации автоматически удовлетворяет граничному условию равновесия на границе фазового перехода, и, таким образом, уравнение адвекции-диффузии может быть решено для обоих веществ одновременно.

Масштабирование следующее

$$x_i = \frac{C_{i,T}}{C_{i,max}}, \quad (3.3)$$

где x_i — концентрация вида i относительно его максимальной растворимости в текущем материале в абсолютных единицах массы. Максимальная растворимость должна быть постоянной (независимой от температуры) для того, чтобы абсолютная массовая формулировка уравнения адвекции-диффузии оставалась неизменной.

Также можно включить температурно-зависимую диффузию (диффузию Соре). Это вводит дополнительный член в правой части уравнения:

$$- \nabla \cdot (\rho D_i T \nabla T), \quad (3.4)$$

где $D_i T$ — коэффициент термодиффузии вида i . Коэффициент $D_i T$ должен быть указан в единицах m^2/Ks независимо от единиц, используемых для концентрации.

Скорость адвективной жидкости, v , обычно вычисляется с помощью уравнения Навье-Стокса и считается из файла перезапуска. Все величины также могут быть функциями, например, температуры, которая задана или решена уравнением теплопроводности. Несколько уравнений адвекции-диффузии для разных видов i могут быть связаны и решены для одного и того же поля скорости.

Заданный объем источников видов S_i может быть задан. Они даны в абсолютных единицах массы, т.е. $kg/m^3 s$.

Если уравнение масштабируется до максимальной растворимости, исходный член может быть задан в абсолютных единицах массы или в масштабированных единицах, $S_{i,sc} = S_i/C_{i,max}$, что является значением по умолчанию.

3.2.2 Граничные условия

Для каждого вида в качестве граничных условий можно применить либо заданную концентрацию, либо поток массы.

Граничное условие Дирихле имеет вид

$$C_i = C_{i,b}, \quad (3.5)$$

или

$$C_i = C_{i,b}, \quad (3.6)$$

в зависимости от единиц. Если концентрация масштабируется до максимальной растворимости, граничные условия Дирихле должны быть заданы также в масштабированных значениях, $x_i = C_{i,b}/C_{i,max}$. Во всех вариантах граничное значение может быть постоянным или функцией времени, положения или других переменных.

Можно задать поток массы q_i , перпендикулярный границе, как

$$q_i = -D_i \nabla n \cdot \frac{C_i}{C_{i,max}} = g_i. \quad (3.7)$$

В относительных единицах массы это можно записать как

$$q_i = -\rho D_i \nabla n \cdot \frac{C_i}{C_{i,max}} = g_i. \quad (3.8)$$

Таким образом, единицы в граничном условии потока всегда $kg/m^2 s$, за исключением случая, когда уравнение масштабируется до максимальной растворимости. В этом случае по умолчанию условие потока задается в масштабированных единицах, $g_{sc} = g/C_{i,max}$, хотя физические единицы также возможны.

Массовый поток также может быть определен коэффициентом массопередачи β и внешней концентрацией $C_{i,ext}$

$$D_i = \beta (C_i - C_{i,ext}). \quad (3.9)$$

На границах, где граничное условие не указано, применяется граничное условие $g = 0$.

Это условие нулевого потока также используется на оси симметрии в двумерных, осесимметричных или цилиндрических задачах.

Граничное условие равновесия на границах фазового перехода при определенных условиях заключается в том, что относительные величины транспортируемого количества равны по обе стороны границы,

$$\frac{C_{j, \max}^{(1)}}{C_{i, \max}^{(1)}} = \frac{C_{j, \max}^{(2)}}{C_{i, \max}^{(2)}}, \quad (3.10)$$

где верхние индексы (1) и (2) относятся к разным сторонам границы. Это граничное условие (j) автоматически выполняется, если уравнение масштабируется с максимальными растворимостями $C_{i, \max}$.

Однако масштабирование приводит к разрыву потока массы вида через поверхность фазового перехода. Решатель компенсирует этот эффект, пока такая граница отмечена в командном файле с помощью

пользователь.

3.3 Ключевые слова

Моделирование

В разделе моделирования приведены данные случай-контроль:

Тип моделирования Уравнение

адвекции-диффузии строны может быть как переходным, так и стационарным.

Строка системы координат

Определяет используемую систему координат: декартова 1D, декартова 2D, декартова 3D, полярная 2D, полярная 3D, цилиндрическая, цилиндрически симметричная и осесимметричная.

Метод временного шага Строка Возможные

значения этого параметра: Newmark (необходимо задать дополнительный параметр Newmark Beta), BDF (необходимо задать порядок BDF). Также в качестве сокращения к методу Newmark со значениями Beta=0.0, 0.5, 1.0 могут быть заданы ключевые слова Explicit Euler, Crank-Nicolson и Implicit Euler соответственно. Рекомендуемым выбором для временного интегрирования первого порядка является метод BDF порядка 2.

Целочисленное значение порядка

BDF может находиться в диапазоне от 1 до 5.

Ньюмарк Бета Реал

Значение в диапазоне от 0,0 до 1,0. Значение 0,0 соответствует явному методу интегрирования Эйлера, а значение 1,0 соответствует неявному методу Эйлера.

Решатель решателя идентификатор

Раздел решателя определяет переменные управления решателем уравнений. Большинство возможных ключевых слов — например, связанных с линейной алгеброй — являются общими для всех решателей и объясняются в другом месте.

Строка уравнения [Имя переменной уравнения адвекции-диффузии]

Название уравнения, например, Уравнение адвекции-диффузии кислорода.

Переменная Строка Имя переменной Имя

переменной, например, Кислород.

Файл процедуры "AdvectionDiffusion" "AdvectionDiffusionSolver"

Имя файла и подпрограммы.

Нелинейная система Сходимость Допуск Действительный

Критерий прекращения нелинейной итерации после того, как относительное изменение нормы полевой переменной между двумя последовательными итерациями k достаточно мало

$$||u_k - u_{k-1}|| < ||u_k||,$$

где u — значение, заданное этим ключевым словом, а u — это либо c_i , либо C_i .

Нелинейная система, максимальное число итераций . Целое число.

Максимальное количество нелинейных итераций, которые разрешено выполнить решателю.

Nonlinear System Relaxation Factor **Real** Присвоение этого ключевого слова

запускает использование релаксации в решателе нелинейных уравнений. Использование фактора ниже единицы иногда требуется для достижения сходимости нелинейной системы. Фактор выше единицы может ускорить сходимость. Расслабленная переменная определяется следующим образом:

$$= \lambda u_k + (1 - \lambda) u_{k-1}, u_k$$

где λ — фактор, заданный этим ключевым словом. Значение по умолчанию для фактора релаксации — единица.

Допуск сходимости устойчивого состояния **Real** С этим ключевым словом

задается допуск сходимости устойчивого состояния или связанной системы для конкретного уравнения. Все активные решатели уравнений должны соответствовать собственным допускам для своей переменной u , прежде чем вся система будет считаться сошедшейся. Критерий допуска:

$$||u_i - u_{i-1}|| < ||T_i||,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Стабилизировать **Логический**

Если этот флаг установлен в значение true, решатель будет использовать стабилизированный метод конечных элементов при решении уравнения адвекции-диффузии с конвективным членом. Если этот флаг установлен в значение False, вместо него используется стабилизация RFB (Residual Free Bubble) (если только следующий флаг Bubbles не установлен в значение False в задаче с декартовой системой координат). Если доминирует конвекция, для успешного решения уравнения необходимо использовать какую-либо форму стабилизации. Значение по умолчанию — False.

Bubbles **Logical** Существует

также формулировка стабилизированного метода конечных элементов без остатков и пузырьков. Она более точна и не включает в себя никаких специальных терминов. Однако она может быть более затратной в вычислительном отношении. Значение по умолчанию — True. Если и Stabilize, и Bubbles установлены в False, стабилизация не используется. Этот выбор может быть применен в задаче с декартовыми координатами, но результаты могут быть бессмысленными. Stabilize и Bubbles не должны быть установлены в True одновременно.

Уравнение eq id Раздел

уравнений используется для определения набора уравнений для тела или набора тел.

Уравнение адвекции-диффузии Имя переменной **Логическое** Если установлено

значение True, решается уравнение адвекции-диффузии.

Строка конвекции Тип конвекции,

который будет использоваться в уравнении адвекции-диффузии, один из следующих: Нет, Вычисляемый, Постоянный.

Единицы измерения концентрации **Строка** Если

установлено значение Absolute Mass, для концентрации используются абсолютные единицы измерения массы.

Рекомендуется для сжимаемого потока. Также можно выбрать Mass To Max Solubility, что приводит к масштабированию абсолютной массовой формулы уравнения по максимальным растворимостям каждого материала.

Body Forces bf id Раздел body

force может использоваться для задания дополнительных силовых членов для уравнений. Следующее ключевое слово распознается решателем:

Varname Источник диффузии **Реальный**

Дополнительный источник объема для уравнения адвекции-диффузии может быть задан этим ключевым словом. Он может зависеть от координат, температуры и других переменных, таких как концентрация других химических веществ, и, таким образом, описывать источник, сток или термин реакции. Задается в абсолютных единицах массы или, в случае масштабирования, в масштабированных единицах.

Физические единицы Логические Истинные

С помощью этого ключевого слова исходный термин может быть задан в абсолютных единицах массы независимо от масштабирования.

Начальное состояние `ic id`

Раздел начальных условий может использоваться для задания начальных значений концентрации c_i , C_i или x_i .

Варнаме `Real`**Material** `mat id` Раздел

материала используется для задания значений параметров материала. Следующие параметры материала могут быть эффективными при решении уравнения адвекции-диффузии.

Скорость конвекции `i` `Real`ная

Скорость конвекции $i = 1, 2, 3$ для модели постоянной конвекции.

Density `Real` Значение

плотности транспортируемой жидкости задается этим ключевым словом. Значение может быть постоянным или переменным. Для сжимаемого потока плотность транспортируемой жидкости вычисляется внутренне, и это ключевое слово не имеет никакого эффекта.

Строка модели сжимаемости

Этот параметр может использоваться для задания модели сжимаемости для моделирования потока. Варианты выбора: Несжимаемый и Идеальный газ. Если выбран последний, плотность рассчитывается по закону идеального газа. Затем также должны быть заданы параметры Опорное давление, Удельный показатель теплоемкости и Теплоемкость.

Реальное опорное давление

С помощью этого ключевого слова можно указать контрольный уровень давления.

Коэффициент удельной теплоемкости `Real`ный

Отношение удельных теплоемкостей (при постоянном давлении и постоянном объеме) может быть задано с помощью этого ключевого слова. Значение этого параметра по умолчанию — $5/3$, что является подходящим значением для одноатомного идеального газа.

Теплоёмкость действительная

Для сжимаемого потока удельная теплоёмкость при постоянном объёме.

Реальная диффузионная способность `Варнаме`

Коэффициент диффузии D задается, например, коэффициентом диффузии кислорода. Может быть константой или переменной.

Для анизотропного случая может быть также тензором D_{ij} .

Варнаме `Соре` Диффузионность `Real`ная

Коэффициент температуропроводности DT , определяемый, например, коэффициентом диффузии кислорода `Соре`. Может быть постоянным или переменным.

Варнам Максимальная Растворимость `Real`ная

Максимальная растворимость вида в абсолютных единицах массы. Должна быть постоянной величиной.

Граничное условие `bc id`

В уравнении адвекции-диффузии мы можем задать концентрацию непосредственно с помощью граничных условий Дирихле или использовать условие потока массы. Естественным граничным условием является условие нулевого потока.

Варнаме `Real`**Коэффициент массопередачи** `реальный`**Внешняя концентрация** `Real`ная

Эти два ключевых слова используются для определения условия потока, которое зависит от внешней концентрации и коэффициента массопередачи. Это условие применимо только к абсолютной массовой формулировке уравнения (см. ключевые слова для блока Equation).

Varname `Flux` `Real`

Пользовательский термин потока массы в абсолютных единицах массы или, в случае масштабирования, в масштабированных единицах.

Физические единицы Логические Истинные

С этим ключевым словом граничное условие потока может быть задано в абсолютных единицах массы независимо от масштабирования. Обратите внимание, что это ключевое слово НЕ влияет на граничное условие Дирихле или коэффициент массопередачи bc.

Имя переменной Граница изменения растворимости Логическое значение True Это

ключевое слово обозначает границу, за которой изменяется максимальная растворимость. Должна присутствовать для сохранения непрерывности потока массы.

Нормальное целевое тело целое число bd id

В границе изменения растворимости это ключевое слово может использоваться для управления тем, с какой стороны выполняется компенсация потока массы. В принципе, это можно сделать с любой стороны, но может быть некоторое влияние на точность или скорость решения. Рекомендуется задать в качестве нормальной цели тело с менее плотной сеткой или направление переноса среднего вида. Если нормальное целевое тело не указано, используется материал с меньшей плотностью.

Модель 4

Уравнение адвекции-реакции

Имя модуля: AdvectionReaction

Подпрограммы модуля: AdvectionReactionSolver

Авторы модуля: Микко Лили, Юха Руоколайнен, Томас Цвингер

Авторы документа: Томас Цвингер

4.1 Введение

Уравнение адвекции-реакции описывает перенос пассивной скалярной величины с жидкостью. Предполагается, что переносимая величина не влияет на поле скорости. Помимо скорости реакции, уравнение адвекции-реакции может иметь источники или стоки. Если скорость реакции и источник не указаны, это уравнение можно использовать для отслеживания пассивных скаляров через заданное поле потока. Если указан постоянный источник единичного значения, это уравнение также можно использовать для оценки времени, в течение которого пассивный трассер оставался в поле потока.

4.2 Теория

4.2.1 Основные уравнения

Адвективный перенос скаляра c можно записать как

$$\frac{dc}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla c + \Gamma c = S, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость адвекции, Γ — скорость реакции, а S — источник/сток, в зависимости от знака.

Из-за отсутствия какой-либо диффузии (4.1) должно быть решено с помощью метода Discontinuous Galerkin (DG). Elmer реализует конкретный метод, представленный в [1]. Для оценки скачков через границы разделов в параллельных вычислениях DG требует использования элементов гало для разложения домена (подробности см. в руководстве ElmerGrid).

4.2.2 Ограничители

Если скаляр имеет нижний, $\min$ c и/или верхний предел $\max$ c (где предел может быть также функцией другой переменной), вариационная форма (4.1) становится вариационным неравенством. Для получения согласованного решения применяется метод, использующий ограничения Дирихле внутри области. Точная процедура следующая:

1. построить линейную систему: $A c = S$, с матрицей системы A и вектором решения c на левой стороне и вектор силы S с правой стороны
2. сделать узлы активными, если ограничение нарушено

3. для активных узлов матрица и вектор силы манипулируются таким образом, что фактически применяется условие Дирихле $c = \max/\min$
4. решается управляемая система: $A^{\sim} \tilde{c} = S^{\sim}$
5. остаток получается из необработанной системы: $R = A^{\sim} \tilde{c} - S^{\sim}$
6. активный узел сбрасывается, если остаток $R < 0$ (для нижнего предела) и $R > 0$ (для верхнего предела)

Весь алгоритм повторяется (в пределах нелинейного итерационного цикла) до тех пор, пока не будет достигнут предел, заданный в Nonlinear System Convergence Tolerance. В сходящемся решении остаток представляет собой необходимое накопление/поток объема (на уровне матрицы, следовательно, не в физических единицах), необходимое для получения ограниченного решения. Следовательно, система не обязательно сохраняет объем, если применяется метод Дирихле.

4.2.3 Граничные условия

На границах граничное условие Дирихле имеет вид

$$c = c_b. \quad (4.2)$$

По характеру применяемого метода DG указанное выше условие применяется только на границах притока, т. е. если

$$v \cdot n_b < 0, \quad (4.3)$$

где n_b — нормаль к внешней поверхности границы.

На границах, где граничное условие не задано, при притоке применяется граничное условие $c = 0$.

4.3 Ключевые слова

Моделирование

В разделе моделирования приведены данные случай-контроль:

Тип моделирования Уравнение адвекции-реакции струны может быть как переходным, так и установившимся.

Строка системы координат

Определяет используемую систему координат: декартова 1D, декартова 2D, декартова 3D, полярная 2D, полярная 3D, цилиндрическая, цилиндрически симметричная и осесимметричная.

Метод временного шага Строка Возможные

значения этого параметра: Newmark (необходимо задать дополнительный параметр Newmark Beta), BDF (необходимо задать порядок BDF). Также в качестве сокращения к методу Newmark со значениями Beta=0.0,0.5, 1.0 могут быть заданы ключевые слова Explicit Euler, Crank-Nicolson и Implicit Euler соответственно. Рекомендуемым выбором для временного интегрирования первого порядка является метод BDF порядка 2.

Целочисленное значение порядка

BDF может находиться в диапазоне от 1 до 5.

Ньюмарк Бета Реал

Значение в диапазоне от 0,0 до 1,0. Значение 0,0 соответствует явному методу интегрирования Эйлера, а значение 1,0 соответствует неявному методу Эйлера.

Решатель решателя идентификатор

Раздел решателя определяет переменные управления решателем уравнений. Большинство возможных ключевых слов — например, связанных с линейной алгеброй — являются общими для всех решателей и объясняются в другом месте.

Уравнение струнной адвекции-диффузии

Название уравнения может быть произвольным, но уникальным.

Discontinuous Galerkin Logical необходимо установить в

True. В настоящее время это также применяется внутренне.

Переменная Строка Имя переменной —

Имя переменной, например, Tracer.

Файл процедуры "AdvectionReaction" "AdvectionReactionSolver"

Имя файла и подпрограммы.

Нелинейная система Сходимость Допуск Действительный

Критерий прекращения нелинейной итерации после того, как относительное изменение нормы полевой переменной между двумя последовательными итерациями k достаточно мало

$$\left| \frac{c_k - c_{k-1}}{c_k} \right| < \epsilon,$$

где ϵ — значение, заданное этим ключевым словом.

Нелинейная система, максимальное число итераций. Целое число.

Максимальное количество нелинейных итераций, которые разрешено выполнить решателю.

Допуск сходимости устойчивого состояния Real С этим ключевым словом

задается допуск сходимости устойчивого состояния или связанной системы для конкретного уравнения. Все активные решатели уравнений должны соответствовать собственным допускам для своей переменной c , прежде чем вся система будет считаться сошедшейся. Критерий допуска:

$$\left| \frac{c_i - c_{i-1}}{c_i} \right| < \epsilon_i,$$

где ϵ_i — значение, заданное этим ключевым словом.

Предельное решение Логическое

Если установлено значение true, предполагается применение метода вариационного неравенства.

Вычислить узловое среднее логическое

Пользователь может выбрать усреднение поля Discontinuous Galerkin по узлам. Это исторически было необходимо для визуализации полей с помощью ElmerPost, но Paraview также может обрабатывать поля ячеек. Если этот флаг установлен, то имя Varname nodal используется для результирующего поля.

Уравнение eq id Раздел

уравнений используется для определения набора уравнений для тела или набора тел.

Конвекционная струна

Тип конвекции, который будет использоваться в уравнении адвекции-реакции, один из следующих: Нет, Вычисляется, Постоянный.

Body Forces bf id Раздел body

force может использоваться для задания дополнительных силовых членов для уравнений. Следующее ключевое слово распознается решателем:

Имя переменной Источник Реальный

определяет объемный источник для переменной c

Начальное состояние ic id

Раздел начальных условий может использоваться для задания начальных значений скаляра c .

Имя переменной Real

Материал коврика ID

Раздел материала используется для задания значений параметров материала. Следующие параметры материала могут быть эффективными при решении уравнения адвекции-диффузии.

Скорость конвекции i Реальная

Скорость конвекции $i = 1, 2, 3$ для модели постоянной конвекции.

Имя переменной Верхний предел Действительный

Верхний предел, $stax$, для переменной Имя переменной. Используется только если ключевое слово Limit Solution для решателя установлено в значение true

Имя переменной Нижний предел Действительный

Верхний предел, $stip$, для переменной Имя переменной. Используется только если ключевое слово Limit Solution для решателя установлено в значение true

Имя переменной Gamma Real определяет

скорость реакции, Γ

Граничное условие $bc\ id$

Имя переменной Real устанавливает значение s на границах притока

Библиография

- [1] Ф. Бреcci и Э. Марини, Л. Д. и Сули. Разрывные методы Галеркина для гиперболических задач первого порядка. Матем. Модели и методы. Прикладная наука, 14(12):1893–1903, 2004.

Модель 5

Уравнение Рейнольдса для течения тонкой пленки

Имя модуля: ReynoldsSolver

Подпрограммы модуля: ReynoldsSolver, ReynoldsHeatingSolver

Авторы модуля: Питер Рабак

Авторы документа: Питер Рабак

5.1 Введение

Течение жидкостей находится на уровне континуума, обычно описываемом уравнениями Навье-Стокса. Для узких каналов этот подход является излишним и обычно даже не нужен. Пренебрегая инерционными силами и предполагая полностью развитые ламинарные профили скорости, уравнения потока можно уменьшить в размерности, что приведет к уравнению Рейнольдса.

Текущая реализация уравнения Рейнольдса подходит для несжимаемых и слабосжимаемых жидкостей, а также для изотермических и адиабатических идеальных газов. Нелинейные члены для сжимаемых жидкостей учтены. Предполагается, что жидкость является ньютоновской, т.е. существует прямая связь между скоростью деформации и напряжением. Уравнение может быть решено как в стационарном состоянии, так и в переходном режиме.

Для целей постобработки имеется дополнительный решатель, который вычисляет локальное поле генерации тепла с использованием метода Галеркина. Он также вычисляет интегралы по силовым и тепловым полям по всей области.

5.2 Теория

Основное предположение уравнения Рейнольдса заключается в том, что поток в канале полностью развит и имеет, таким образом, параболический профиль скорости Хагена-Пуазейля. Учитывая также движение плоскостей и утечку через перфорационные отверстия, давление может быть решено из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \rho h v_t - \rho h v_n \quad (5.1)$$

где ρ — плотность, η — вязкость, p — давление, h — высота зазора, v_t — тангенциальная скорость, v_n — скорость в направлении нормали к поверхности [1, 5]. Отверстия можно гомогенизировать с помощью пропускной способности потока Y , которая дает соотношение между падением давления и средней скоростью потока через отверстие.

Точная форма уравнения Рейнольдса зависит от материального закона для плотности, $\rho(p)$. Абсолютное значение плотности не играет никакой роли, и поэтому мы можем изучать только функциональные формы. Для газов мы решаем для изменения давления от опорного давления P_0 , а не для абсолютного давления.

p	$(P_0 + p) \rho$	изотермический идеальный газ
$(P_0 + p)^{1/\gamma}$		адиабатический идеальный газ
ρ	1	несжимаемый
ρ_e	ρ/β	слабо сжимаемый.

рп	1	изотермический идеальный газ
рр	$(1/\gamma)(P_0 + p) \cdot 1/\gamma$	1 адиабатический идеальный газ
рп	0	несжимаемый
оп	р/б	слабо сжимаемый.

$$\frac{p_{h3}}{12-e} \cdot p \quad Y_{pp} \quad p_{ph} \quad \frac{p}{\tau} \quad \frac{1}{2} p_{phvt} \cdot p = \frac{1}{2} p \cdot (hvt) + p_{vn}. \quad (5.2)$$
$$BH = B \cdot H$$
$$B_H = \frac{h}{\tau}. \quad (5.3)$$
$$\gamma = \frac{D^2}{32n\theta}, \quad (5.4)$$
$$Y = \frac{\pi^2}{126n}. \quad (5.5)$$
$$K_H = \frac{L}{\Delta x}, \quad (5.6)$$

где λ — длина свободного пробега молекул, а h — характерный масштаб (здесь — высота зазора). В этом решателе учитывается только зависимость от давления из формулы

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{1}{1 + p/p_0} \quad (5.7)$$

Когда число Кнудсена очень мало ($Kn \ll 1$), газ можно рассматривать как сплошную среду. Когда число Кнудсена находится в переходном режиме ($Kn \sim 1$), мы можем учесть эффект разрежения газа с помощью эффективной вязкости. Это учитывает условия скольжения потока в канале путем уменьшения значения вязкости. Приближение, данное Вейолой [4], имеет вид

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + 9,638Kn^{1,159}} \quad (5.8)$$

Его относительная точность составляет 5 % в интервале $0 < Kn < 880$.

5.2.3 Граничные условия для уравнения Рейнольдса

Уравнение Рейнольдса может иметь различные граничные условия. Естественное граничное условие, которое получается по умолчанию, это

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (5.9)$$

Это условие можно использовать при симметрии и замкнутых границах.

Если соотношение сторон резонатора велико, то изменение давления на открытых сторонах мало по сравнению со значениями вдали от границ. Тогда можно задать граничные условия Дирихле ($p = 0$) для давления. Однако, если соотношение сторон относительно мало, следует учитывать эффекты открытой стороны. Изменение давления на стороне не совсем равно нулю, а открытое пространство также имеет сопротивление потоку. Производная давления на границе аппроксимируется как

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{p}{L}, \quad (5.10)$$

где L — эффективная добавленная длина открытых сторон [3]. Если разрежение газа не учитывается, то $L = 0,8488h$, в противном случае

$$L = 0,8488(1,0 + 2,676Kn^{0,659})h \quad (5.11)$$

5.2.4 Постобработка

Когда уравнение решено, решение может быть использовано для вычисления некоторых данных для целей постобработки. Локальный объемный поток в боковом направлении может быть получен из

$$12\eta \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + p + h \nabla^2 p = 0 \quad (5.12)$$

Полная сила, действующая на поверхность, равна

$$\Phi = \int_A p \, dA + \int_A \tau_{xy} \, dA, \quad (5.13)$$

где первый член обусловлен потоком, управляемым давлением, а второй — скользящим потоком. Также можно вычислить эффект нагрева. Он состоит из двух частей: потока, управляемого давлением, и скользящего потока. Локальная форма этого:

$$q = \frac{\eta}{12} \left| \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right| + \frac{2}{h} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \quad (5.14)$$

Следовательно, общая тепловая мощность системы составляет

$$B = \int_A q \, dA. \quad (5.15)$$

Следует отметить, что если поле скорости v постоянно, то интегральные величины должны удовлетворять условию $Q = F \cdot v$.

Обратите внимание, что приведенная выше реализация не учитывает утечку через перфорационные отверстия и эффекты сжимаемости жидкостей.

5.3 Ключевые слова

Модуль включает в себя два различных решателя. ReynoldsSolver решает дифференциальное уравнение (5.2), а ReynoldsHeatingSolver решает уравнение (5.14) и вычисляет интегралы. Второй решатель имеет смысл только тогда, когда поле давления уже вычислено с помощью первого. Второй решатель использует те же параметры материала, что и первый.

Ключевые слова для ReynoldsSolver

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения Рейнольдса Решатель

Описывающее имя решателя. Оно может быть изменено, пока используется последовательно.

Файл процедуры "ReynoldsSolver" "ReynoldsSolver"

Имя подпрограммы решателя.

Изменяемое давление пленки струны

Имя переменной может быть выбрано свободно, если оно последовательно используется и в других местах.

Переменная DOFs Целое число 1 Степени

свободы для давления. Это должно быть 1, что также является значением по умолчанию.

Файл процедуры "ReynoldsSolver" "ReynoldsSolver"

Имя модуля и процедуры. Они фиксированы.

Применить ограничитель логический

Общие мягкие ограничители могут применяться для уравнения Рейнольдса, чтобы имитировать эффекты кавитации.

При активном флаге учитываются минимальные и максимальные ограничители.

Нелинейная система Сходимость Допуск Действительный

Уравнение переходного процесса является нелинейным, если относительное смещение или отклонение давления велико.

Итерация продолжается до тех пор, пока относительное изменение нормы не станет меньше значения, заданного этим ключевым словом.

Nonlinear System Max Iterations Integer Этот параметр задает

максимальное количество нелинейных итераций, требуемых в решении. Его можно установить выше, чем типичное количество требуемых итераций, поскольку процедура итерации должна скорее контролироваться допуском сходимости.

Материал коврика ID

Gap Height Real Высота

зазора, в котором удерживается жидкость. Если случай переходный, пользователь должен сам убедиться, что эта переменная также имеет правильную зависимость от времени.

Скорость поверхности i Действительная

Скорость движущегося тела может быть задана либо в декартовых координатах, либо в тех, которые уже разделены на нормальные и тангенциальные направления. В первом случае компоненты скорости задаются с помощью этого ключевого слова с i=1,2,3.

Касательная скорость i Действительная

Для задания тангенциальной скорости (т.е. скорости скольжения) используйте это ключевое слово с i=1,2,3.

Нормальная скорость Действительная

нормальная скорость — это скорость в направлении нормали к поверхности. Обычно отрицательное значение означает сокращение.

Вязкость Реальная вязкость

газа.

Строка модели вязкости Варианты

выбора: ньютоновская и разреженная. Первая также является значением по умолчанию.

Строка модели сжимаемости

Возможные варианты: несжимаемый, слабосжимаемый, изотермический идеальный газ и адиабатический идеальный газ.

Реальное опорное давление

Опорное давление требуется только для законов идеального газа.

Коэффициент удельной теплоемкости Реальный

Этот параметр требуется только для адиабатических процессов. Для идеальных одноатомных газов отношение равно 5/3. Требуется только для модели адиабатической сжимаемости.

Реальный объемный модуль упругости

Параметр β в модели слабосжимаемого материала.

Реальный средний свободный пробег

Если модель вязкости предполагает наличие разреженных газов, то необходимо задать среднюю длину свободного пробега молекул газа при опорном давлении.

Поток Допуск Реальный

Например, установившийся поток, возникающий в результате перфорации.

Body Force bf идентификатор**Нижний предел давления пленки Реальный**

Нижний предел давления, который будет итеративно применяться при активации мягких ограничителей.

Граничное условие bc id**FilmPressure Real**

Задаёт граничные условия для давления. Обычно отклонение от опорного давления равно нулю на границах.

Логический эффект открытого

конца можно учесть, установив это ключевое слово в значение True.

Ключевые слова для ReynoldsPostprocess

Этот решатель использует в основном те же ключевые слова, которые уже определены выше. Только раздел Solver имеет свои собственные настройки ключевых слов. Эти решатели должны быть активны в тех же телах, что и ReynoldsSolver.

Решатель решателя идентификатор**Equation String ReynoldsPostprocess** Описывающее имя решателя.

Оно может быть изменено, пока используется последовательно.

Файл процедуры "ReynoldsSolver" "ReynoldsPostProcess"

Имя подпрограммы решателя.

Имя переменной давления Рейнольдса String Имя поля, которое, как

предполагается, предоставляет поле давления. Значение по умолчанию — FilmPressure.

Обратите внимание, что переменную этого уравнения определять не нужно, поскольку она автоматически задается при запросе любого вычисления поля.

Рассчитать силу логики

Рассчитайте силы, возникающие из распределения давления, рассчитанного с помощью уравнения Рейнольдса.

Название поля получается путем добавления суффикса Force.

Рассчитать поток логический

Рассчитайте потоки, полученные из распределения давления, рассчитанного с помощью уравнения Рейнольдса.

Название поля получается путем добавления суффикса Flux.

Расчет нагрева Логический Расчет эффективности

нагрева из распределения давления, рассчитанного с помощью уравнения Рейнольдса. Название поля получается путем добавления суффикса Heating.

Вычислить силу Dim Integer

По умолчанию размерность силового поля равна размерности сетки плюс один. Иногда давление живет на одномерной линии двумерной сетки. Тогда это ключевое слово может быть использовано для подавления размерности силы до двух.

Рассчитать Flux Dim Integer

То же, что и предыдущее ключевое слово, но для потока.

Библиография

- [1] B.J. Hamrock, S.R. Schmid и W.O. Jacobson. Основы жидкостной смазки. Марсель Деккер, второе издание, 2004 г.
- [2] P. Rback, A. Pursula, V. Junttila и T. Veijola. Иерархическое конечно-элементное моделирование перфорированных пластин с произвольной геометрией отверстий. В NANOTECH 2003, Сан-Франциско, 23–27 февраля 2003 г., том 1, страницы 194–197.
- [3] Т. Вейола. Справочное руководство по APLAC 7.60, январь 2002 г. Электромеханические макромодели.
- [4] Т. Вейола, Х. Куисма, Дж. Ладенпер и Т. Райнен. Эквивалентная модель пленки сжатого газа в кремниевом акселерометре. Датчики и приводы А, стр. 239–248, 1995.
- [5] Т. Вейола и П. Рбак. Метод решения произвольных задач перфорации мембран с учетом эффектов инертного газа. В NANOTECH 2005, Анахайм, 8–12 мая 2005 г., том 3, страницы 561–564.

Часть 2

Модели механики твёрдого тела

Модель 6

Линейная эластичность

Название модуля: StressSolve

Подпрограммы модуля: StressSolver

Авторы модуля: Юха Руоколайнен

Авторы документа: Юха Руоколайнен, Томас Цвингер

6.1 Введение

Этот модуль вычисляет поле смещения из уравнений Навье. Эти уравнения соответствуют линейной теории упругих деформаций твердых тел. Материал может быть анизотропным, а напряжения могут быть вычислены как шаг постобработки, если это запрошено пользователем. Также могут быть запрошены термические напряжения.

6.2 Теория

Динамические уравнения упругих деформаций твердых тел можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = \tau = f, \rho \quad (6.1)$$

где ρ — плотность, d — поле смещения, f — объемная сила, а τ — тензор напряжений. Тензор напряжений определяется как

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + \beta_{ij} (T - T_0), \quad (6.2)$$

где ϵ — деформация, а величина C — модуль упругости. Модуль упругости — это тензор четвертого порядка, который в 3D имеет максимум 21 независимую компоненту (в 2D 10) из-за симметрии. В Элмере тепловые напряжения можно рассматривать, задавая тензор теплового расширения β и опорную температуру T_0 состояния без напряжений. Температурное поле T можно решить с помощью решателя уравнений теплопроводности или иным образом.

Линеаризованные деформации задаются просто как

$$e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d}{\partial x} + \left(\frac{\partial d}{\partial x} \right)^T \right). \quad (6.3)$$

6.2.1 Материальные законы

Для изотропных материалов тензор модуля упругости может быть выражен через два независимых скаляра, либо через два параметра Ламе μ и λ , либо через модуль Юнга Y и коэффициент Пуассона ν . Тензор напряжений, заданный через параметры Ламе, имеет вид

$$\tau = 2\mu e + \lambda \text{div} I + \beta(T - T_0)I, \quad (6.4)$$

где β — коэффициент теплового расширения, а I — единичный тензор. Параметры Ламе в терминах модуля Юнга и коэффициента Пуассона имеют вид

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.5)$$

за исключением ситуаций плоского напряжения ($\tau_z = 0$), где λ определяется как

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu)(1+2\nu)}. \quad (6.6)$$

Для анизотропных материалов соотношения напряжение-деформация можно задать в несколько иной форме, записав

$$\tau V = E \epsilon V, \quad (6.7)$$

где τV и ϵV — векторы напряжения и деформации соответственно, а матрица E (6×6 в 3D, 4×4 в 2D) — матрица коэффициентов упругости. Векторы напряжения и деформации определяются как

$$\tau V = (\tau_x \tau_y \tau_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz})^T \quad (6.8)$$

и

$$\epsilon V = (\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z 2\epsilon_{xy} 2\epsilon_{yz} 2\epsilon_{xz})^T. \quad (6.9)$$

В 2D вектор напряжения равен

$$\tau V = (\tau_x \tau_y \tau_z \tau_{xy})^T \quad (6.10)$$

и вектор деформации

$$\epsilon V = (\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z 2\epsilon_{xy})^T. \quad (6.11)$$

Когда запрашивается расчет плоского напряжения, $\tau_z = 0$, в противном случае $\epsilon_z = 0$. Цилиндрически симметричный случай идентичен двумерному случаю, компоненты задаются в порядке r, z и ϕ . Матрица E задается как входные данные для анизотропной материальной модели Элмера.

6.2.2 Вязкоупругая модель Максвелла

Предполагая несжимаемость, вводится вязкоупругая модель Максвелла [1] путем развития тензора вязкоупругого напряжения τ_{ve} ,

$$\frac{\tau_{ve}}{\tau} = \frac{\mu}{\eta} + \frac{\tau}{\eta} (\tau_{ve} - I), \quad (6.12)$$

где μ обозначает динамическую вязкость материала, а Π и I обозначают изотропную часть тензора напряжений Коши и единичный тензор соответственно. Здесь τ по-прежнему обозначает упругую часть тензора напряжений, которая в случае несжимаемости изменяется на

$$\tau = \Pi I + 2\mu. \quad (6.13)$$

Если вязкоупругую модель использовать в контексте деформации твердой Земли, то необходимо ввести восстанавливающую силу (второй член ниже), называемую Гравитационной Предварительной Адвекцией Напряжения (GPA), чтобы предотвратить коллапс нагруженной Земли [1]. Квазистационарный баланс импульса тогда читается как

$$\nabla \cdot \tau - \rho g - \nabla \cdot \tau_{GPA} = 0, \quad (6.14)$$

где g — ускорение силы тяжести, а e_z — вертикальное направление (совпадающее с направлением силы тяжести). $\tau_{GPA} = \rho g$ — локальный коэффициент гравитационной адвекции предварительного напряжения, изменяющийся между различными слоями Земли.

6.2.3 Модальный, гармонический и анализ устойчивости

В дополнение к уравнениям стационарного состояния и зависящим от времени, можно рассмотреть модальный, гармонический и анализ устойчивости. В модальном анализе преобразование Фурье однородной формы динамического уравнения задается как

$$\rho \ddot{\varphi} = \tau(\varphi), \quad (6.15)$$

или

$$\omega^2 \int_{\Omega} \rho \varphi_k \varphi_k d\Omega = \int_{\Omega} \tau_{ij}(\varphi)_{ij}(\psi) d\Omega, \quad (6.16)$$

где ω — угловая частота, а φ — соответствующая мода колебаний.

При рассмотрении модального анализа предварительно напряженных твердых тел мы сначала выполняем стационарный анализ для вычисления тензор напряжений, здесь обозначенный как σ_{ij} , а затем решить вариационное уравнение

$$\omega^2 \int_{\Omega} \rho \varphi_k \varphi_k d\Omega = \int_{\Omega} \tau_{ij}(\varphi)_{ij}(\psi) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\varphi_k}{x_i} \frac{\psi_k}{x_j} d\Omega. \quad (6.17)$$

Здесь последний член в правой части представляет собой геометрическую жесткость, обусловленную внешними нагрузками, термическими напряжениями и т. д.

При анализе устойчивости формы потери устойчивости φ получаются из

$$\lambda \int_{\Omega} \frac{\varphi_k - \psi_k d\Omega}{\Omega} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\varphi_k}{x_i} \frac{\psi_k}{x_j} \tau_{ij}(\varphi)_{ij}(\psi) d\Omega, \quad (6.18)$$

где λ — запас прочности относительно бифуркации (текущая нагрузка может быть умножена на коэффициент λ , прежде чем будет потеряна устойчивость).

Описанные выше уравнения можно интерпретировать как обобщенные собственные задачи и решать с помощью стандартных методов.

6.2.4 Затухание Рэлея

Демпфирование можно учитывать, используя вязкое демпфирование или демпфирование Рэлея, при котором предполагается, что матрица демпфирования C_d пропорциональна матрице масс M и матрице жесткости K как

$$C_d = \alpha M + \beta K. \quad (6.19)$$

Определение подходящих коэффициентов затухания α и β может оказаться сложной задачей.

6.2.5 Граничные условия

Для каждой границы либо граничное условие Дирихле

$$d_i = d_i^0 \quad (6.20)$$

или граничное условие поверхностной силы

$$t \cdot n = g \quad (6.21)$$

должно быть задано. Граничное условие по умолчанию — однородное естественное граничное условие, которое подразумевает, что $g = 0$.

Пользователь может задать коэффициенты пружины k или демпфирования ξ на границе. Они позволяют ввести силовой член в форме

$$dg = kd + \xi \dot{d} \quad (6.22)$$

которые можно трактовать неявно, сохраняя линейную форму уравнения.

6.2.6 Объединение моделей

Для линейных конструкций можно создать сосредоточенную модель, которая дает ту же зависимость между силой и смещением, что и исходная распределенная модель,

$$F = KD \quad (6.23)$$

где $F = (F_x F_y F_z M_x M_y M_z)$ и $D = (D_x D_y D_z \phi_x \phi_y \phi_z)$ однозначно определены, поскольку T . Однако сосредоточенная модель не является зависимой от распределения силы или смещения, используемого при объединении модели. В текущей процедуре объединения модели объединение выполняется относительно заданной границы. Сосредоточенная сила и импульс затем являются интегралами по этой границе,

$$F_{\text{быть}} = \int_A F_{\text{будь}} dA \quad (6.24)$$

Сосредоточенные смещения и углы определяются как средние значения по границе,

$$D_{\text{из}} = \frac{1}{A} \int_A D_{\text{ди}} dA \quad (6.25)$$

Поэтому методология работает лучше всего, если граница сама по себе достаточно жесткая.

Существует два различных алгоритма объединения моделей. Первый использует чистые сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты для определения соответствующих смещений и углов. В 3D это означает шесть различных перестановок. Каждая перестановка дает одну строку обратной матрицы K^{-1} . Чистые сосредоточенные силы получаются постоянными распределениями сил, тогда как чистые моменты получаются линейно изменяющимися нагрузками, исчезающими в центре области. Чистые моменты легко достигаются только для относительно простых границ, что может ограничить применимость утилиты объединения моделей.

Второй вариант объединения моделей — задать чистые перемещения и вращения на границе и вычислить результирующие силы на границе. Этот метод не ограничен геометрическими ограничениями. Также здесь требуется шесть перестановок для получения требуемых данных. В этом методе результирующее матричное уравнение часто ведет себя лучше по сравнению с объединением моделей чистыми силами, что может быть еще одной причиной в пользу этой процедуры.

6.3 Ключевые слова

Решатель решателя идентификатор

Обратите внимание, что все ключевые слова, относящиеся к линейным решателям (начиная с Linear System), могут быть использованы и в этом решателе. Они описаны в другом месте.

Строка уравнения [StressSolver]

Описывающее имя для решателя. Его можно изменить, но оно должно быть указано,

Файл процедуры "StressSolve" "StressSolver"

Имя подпрограммы решателя.

Логический анализ собственных значений

С помощью этого ключевого слова можно запросить модальный анализ или анализ устойчивости.

Собственные системные значения Целое число

Число собственных мод должно быть указано с помощью этого ключевого слова, если применяется модальный анализ или анализ устойчивости.

Логический гармонический анализ.

Используется гармонический анализ во времени, где решение становится комплексным, если определено затухание.

Алгоритм решения предполагает, что диагональные элементы в матричном уравнении доминируют.

Frequency Real Частота,

связанная с гармоническим анализом. Если тип моделирования — сканирование, это может быть скалярная функция, в противном случае предполагается, что это вектор желаемых частот.

Смещение сетки *логическое*

Должна ли сетка деформироваться полем смещения. Значение по умолчанию True, за исключением анализа собственных и гармонических характеристик.

Анализ устойчивости *Логический* Если установлено

значение true, то анализ собственных значений является анализом устойчивости. В противном случае выполняется модальный анализ.

Геометрическая жесткость *Логический* Если

установлено значение true, то геометрическая жесткость учитывается.

Логическая операция вычисления деформаций

Вычисляет тензор деформаций решения.

Вычислить напряжения *Логический* Если

установлено значение true, будет вычислен тензор напряжений. Также по умолчанию будет вычислен тензор напряжений по Мизесу.

Рассчитать главный *логический*

Вычисляет главные компоненты напряжения.

Вычислить Пэнгл *Логический*

Рассчитайте главные углы напряжений.

Модель объединения *логических*

Если требуется объединение моделей, этот флаг следует установить на True.

Файл объединения моделей

Результаты объединения моделей сохраняются во внешний файл, имя которого задается этим ключевым словом.

Исправить смещение *Логическое*

Это ключевое слово определяет, заданы ли смещения или силы, и тем самым выбирает алгоритм объединения модели.

Система постоянного массового расхода *Логическая*

Для некоторых типов анализа только граничные условия изменяются от одного вызова подпрограммы к другому. Тогда исходная матрица может быть сохранена с помощью этого логического ключевого слова. Целью является в основном экономия времени, затрачиваемого на сборку матрицы.

Обновление переходной системы *логики*

Даже если матрица остается постоянной в пределах временного шага, она может меняться со временем. Время также может быть псевдовременем, и тогда, например, частота может меняться со временем, делая гармоническую систему разной между каждым временным шагом. Это ключевое слово имеет эффект только в том случае, если предыдущее ключевое слово также определено как истинное.

Логический материал Максвелла

Если установлено значение true, применяется модель вязкоупругого материала. В случае несжимаемого материала необходимо активировать ключевое слово Incompressible. В этом случае пользователь должен указать значение вязкости в разделе Material.

Несжимаемый *логический*

Предположим, что материал несжимаемый в сочетании с вязкоупругим материалом Максвелла. Это требует объявления дополнительной переменной давления для использования в решателе. Для двумерной задачи это будет выглядеть как Переменная = Строка "t{d:2 p:1}", где d объявляет смещения, а p — давление (изотропная часть тензора напряжений Коши).

Уравнение eq id

Раздел уравнений используется для определения набора уравнений для тела или набора тел:

Логический анализ напряжений. Если

установлено значение True, решаются уравнения Навье.

Плоскость напряжения *Логическая*

Если установлено значение True, вычислить решение в соответствии с ситуацией плоского напряжения tzz = 0. Применимо только в 2D.

Раздел «Теловидная сила»

можно использовать для задания дополнительных силовых членов для уравнений.

Стресс Bodyforce 1 Реал

Стресс Bodyforce 2 Реал

Стресс Bodyforce 3 Реал

Перечисленные выше ключевые слова можно использовать для задания силы объема.

Стресс Bodyforce 1 им Реал

Стресс Bodyforce 2 им Реал

Напряжение Bodyforce 3 им Real Перечисленные

выше ключевые слова могут применяться только в случае гармонического решения уравнения для вычисления мнимой части объемной силы.

Стрессовая нагрузка Реальная

Ключевое слово для определения начальных напряжений для тела. Если геометрия двумерная и не цилиндрически симметричная, ожидается вектор напряжения, состоящий из трех записей.

Реальная деформация нагрузки

Ключевое слово для определения начальных деформаций тела. Если геометрия двумерная и не цилиндрически симметричная, ожидается вектор деформации, состоящий из трех записей.

Гравитационное предварительное напряжение Адвекция Логическая

Переключает дополнительный восстанавливающий член адвекции предварительного напряжения, используемый при деформации твердой Земли.

Средний балл Коэффициент Реальный

Устанавливает фактор гравитационной предварительной адвекции напряжения, сGP A

Начальное состояние ic id

Раздел начальных условий может использоваться для установки начальных значений для переменных поля. Следующие переменные являются активными:

Смещение i Действительное Для

каждого компонента смещения $i = 1, 2, 3$.

Material mat id Раздел

материала используется для задания значений параметров материала. Следующие параметры могут быть установлены при решении уравнений Навье.

Плотность Действительная

Значение плотности задается с помощью этого ключевого слова. Значение может быть постоянным или переменным.

Коэффициент Пуассона Реальный

Для изотропных материалов коэффициент Пуассона должен быть указан с этим ключевым словом.

Модуль Юнга Действительный

Модуль упругости должен быть задан с этим ключевым словом. Модуль может быть задан как скаляр в изотропном случае или как матрица 6×6 (3D) или 4×4 (2D и осесимметричная) в анизотропном случае.

Хотя матрицы симметричны, все записи должны быть указаны.

Логическое затухание Рэлея . Применить

затухание Рэлея.

Релеевское затухание Альфа Действительный

Затухание Рэлея Бета Действительный

Параметры затухания Рэлея.

Предварительное напряжение Реал

Если выполняется анализ устойчивости или учитывается геометрическая жесткость, можно задать предварительное напряжение в качестве входных данных для решателя. Если геометрия двумерная и не является цилиндрически симметричной, ожидается вектор напряжения, состоящий из трех записей.

Предварительно прогнать Реальный

Если выполняется анализ устойчивости или учитывается геометрическая жесткость, можно задать предварительную деформацию в качестве входных данных для решателя. Если геометрия двумерная и не является цилиндрически симметричной, ожидается вектор деформации, состоящий из трех записей.

Коэффициент теплового расширения реальный

Если необходимо вычислить термические напряжения, это ключевое слово может быть использовано для получения значения коэффициента теплового расширения. Его также можно задать как тензор 3×3 в трехмерных случаях и тензор 2×2 в двумерных случаях.

Реальная опорная температура Если необходимо

рассчитать тепловые напряжения, это ключевое слово можно использовать для указания значения опорной температуры состояния без напряжений.

Поворот Тензора Упругости Логический

Для анизотропных материалов главные направления анизотропии не всегда соответствуют осям координат. Установка этого ключевого слова в True позволяет пользователю вводить матрицу модуля Юнга относительно главных направлений анизотропии. В противном случае модуль Юнга должен быть задан относительно направлений осей координат.

Материальные координаты единичный вектор 1(3) Действительный [1 0 0]

Материальные координаты единичный вектор 2(3) Действительный [0 0,7071 0,7071]

Материальные координаты единичный вектор 3(3) Действительный [0 -0,7071 0,7071]

Векторы выше определяют основные направления анизотропного материала. Они необходимы только в том случае, если Rotate Elasticity Tensor установлен на True. Значения, указанные выше, определяют направление анизотропии, отличающееся от осей координат поворотом на 45 градусов вокруг оси x, например.

Скорость сетки 1 Реальная

Скорость сетки 2 Реальная

Скорость сетки 3 Реальная

Ключевые слова для задания скорости сетки

Граничное условие bc id

Разделы граничных условий используются для указания значений параметров для различных типов граничных условий. Следующие команды связаны с уравнениями Навье.

Смещение i Реальное

Граничное условие Дирихле для каждой компоненты смещения i= 1, 2, 3.

Нормально-тангенциальное смещение Логическое Условия Дирихле

для векторных переменных могут быть заданы в нормально-тангенциальной системе координат вместо системы, направленной по осям координат. Первый компонент в этом случае будет нормальным компонентом, а компоненты 2, 3 относятся к двум ортогональным направлениям касательных.

Нормальная сила Действительная

Поверхностная сила (тяга), нормальная к границе, задается этим ключевым словом.

Сила i Реальная

Поверхностная сила (тяга) в заданных координатных направлениях i= 1, 2, 3.

Сила, я реален

Мнимая часть поверхностной силы (тяги) в заданных координатных направлениях i= 1, 2, 3.

Применимо только к гармоническому моделированию.

Нормальная сила Я реален

Мнимая часть поверхностной силы (тяги), нормальная к границе, задается этим ключевым словом. Применимо только к гармоническому моделированию.

Damping Real Заданный

коэффициент вводит силу, пропорциональную скорости. Также могут быть заданы Damping i и Damping ij.

Spring *Real A*

заданный коэффициент вводит силу, пропорциональную смещению. Также могут быть заданы $\text{Spring } i$ и $\text{Spring } ij$.

Стрессовая нагрузка *Реальная*

Ключевое слово для определения поверхностной силы (тяги) на границе в терминах заданных компонент тензора напряжений. В этом случае приложенная поверхностная тяга вычисляется в терминах заданного тензора напряжений и нормального вектора к границе.

Граница объединения моделей *Логическое значение True* **При**

использовании утилиты объединения моделей пользователь должен указать, какая граница должна быть загружена, чтобы определить объединенную модель.

Библиография

- [1] T. Zwinger, G.A. Nield, J. Ruokolainen и M.A. King. Новый модуль деформации вязкоупругой твердой земли с открытым исходным кодом, реализованный в Elmer (v8.4). Geoscientific Model Development, 13:1155–1164, 2020.

Модель 7

Конечная эластичность

Имя модуля: ElasticSolve

Подпрограммы модуля: ElasticSolver

Авторы модуля: Микко Лили, Юха Руоколайнен, Мика Малинен

Авторы документа: Мика Малинен

7.1 Введение

В этой главе рассматриваются уравнения, описывающие конечные деформации упругих твердых тел. Поскольку область пространства, занимаемая телом в момент времени t , заранее неизвестна, неудобно обращаться с уравнениями в форме, выражающей уравнения поля в деформированной конфигурации. Поэтому связанная задача формулируется здесь с использованием опорной конфигурации, которая равна области, занимаемой телом до деформации.

7.2 Уравнения поля

Пусть Ω обозначает исходную конфигурацию, так что область пространства, занимаемая телом в момент времени t , определяется выражением

$$\Omega_t = x(\Omega, t), \text{ где}$$

$x(\cdot, t)$, для фиксированного t , деформация Ω . Если мы определим смещение $u(p, t)$ материальной точки $p \in \Omega$ как

$$u(p, t) = x(p, t) - p,$$

Тогда основная система уравнений поля, описывающая конечные деформации тела Ω , может быть записана как

$$\begin{aligned} \rho_0 u'' - \operatorname{Div} S &= b_0, \\ S &= F \Sigma^-(C), \\ F &= I + \nabla u, C = F^T F, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где ρ_0 дает плотность, когда тело находится в исходном положении, тензорное поле S называется первым напряжением Пиолы-Кирхгофа, а $b_0 = b_0(p, t)$ определяет объемную силу. Функция отклика $\Sigma^-(C)$ в общем случае характеризует второе напряжение Пиолы-Кирхгофа как функцию правого тензора Коши-Грина C .

В базовом случае предполагается, что либо

$$\Sigma^-(C) = -\frac{\lambda}{2} [\operatorname{tr}(C - I)]I + \mu(C - I)^2 \quad (7.2)$$

или, если предполагается неогуковский материал,

$$\Sigma^-(C) = -\frac{\lambda}{2} [\det C - 1]C^{-1} + \mu(I - C^{-1}), \quad (7.3)$$

где λ и μ — материальные параметры Ламе. Отметим, что общий способ выражения (7.2) использует материальные тензор деформации

$$\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (7.4)$$

так что конститутивный закон (7.2) можно записать как

$$\Sigma = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}.$$

Для рассмотрения несжимаемого нео-гуковского материала, связанного с предельным случаем $\lambda \rightarrow \infty$ (или эквивалентно $\nu = 1/2$, где ν — коэффициент Пуассона), введем вспомогательное поле p , определяемое соотношением

$$(1/\lambda)p = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{C}) - 3] \quad (7.5)$$

заменить (7.3) на

$$\Sigma^-(\mathbf{C}, p) = -p\mathbf{C} + \mu(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (7.6)$$

Для обработки случая почти несжимаемого материала (значение ν близко к 0,5) вычислительно поле p принимается как дополнительное неизвестное, которое решается при ограничении (7.5). Примечательно, что в пределе случай несжимаемого материала p уникален только с точностью до константы, если смещение задано по всей границе тела (тогда необходимо особое внимание, чтобы обеспечить выполнение условия $\det \mathbf{C} = \det \mathbf{F}$ $^2 = 1$ соблюдаются граничные условия).

Решатель также предлагает некоторые утилиты для обработки более общих конститутивных законов, так что определяемый пользователем Материальная модель в форме пользовательской подпрограммы Abaqus (UMAT) может быть включена. В этом случае конститутивный закон должен быть определен по-другому, с использованием напряжения Коши σ , описание материала которого $\sigma_m(p, t) = \sigma(x(p, t), t)$ связано с первым напряжением Пиолы-Кирхгофа соотношением

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \sigma_m \mathbf{F}^{-T}. \quad (7.7)$$

Пользовательская подпрограмма должна определять функцию реакции на напряжение σ^- , чтобы указать, как напряжение Коши зависит от поля деформации $\mathbf{E}^*(\mathbf{F})$ и дополнительного N-кортежа полей переменных состояния, обозначенных как $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$. Тогда можно рассмотреть общий конститутивный закон типа

$$\sigma_m(p, t) = \sigma^-(\mathbf{E}^*(\mathbf{F})(p, t), \mathbf{q}(p, t)). \quad (7.8)$$

Пользовательская подпрограмма должна также определять производную напряжения Коши в текущем состоянии с относительно переменной деформации для выполнения процедуры нелинейного решения. То есть, при дифференцировании Функция реакции на стресс рассматривается как композиция

$$\mathbf{F} \mapsto \sigma^-(\cdot, \mathbf{q}) \mapsto \mathbf{E}^*(\mathbf{F}), \quad (7.9)$$

причем $\mathbf{q}$ принимается в качестве параметра, так что дифференциал Фреше (7.9) получается с помощью цепного правила как

$$\mathbf{U} \mapsto \mathbf{D}\sigma^-(\mathbf{E}^*(\mathbf{F}), \mathbf{q})[\mathbf{D}\mathbf{E}^*(\mathbf{F})[\mathbf{U}]]. \quad (7.10)$$

Таким образом, определяемая пользователем подпрограмма должна возвращать представление $\mathbf{D}\sigma^-(\mathbf{E}^*(\mathbf{F}), \mathbf{q})$, так что дифференциал (7.10) может быть сгенерировано на стороне, где вызывается пользовательская подпрограмма. В этой связи поле деформации $\mathbf{E}^*(\mathbf{F})$ не обязательно должна быть материальной деформацией (7.4), как деформация Генки (логарифмическая) или стандартная. Также можно использовать линеаризованную деформацию. Включение пользовательской модели материала требует некоторых навыков программирования и лучшее место для проверки текущей функциональности — это код решателя. Шаблон подпрограммы для пользовательской модели материала также можно найти в файле UMATLib.F90, который находится в том же каталоге, что и код решающего модуля.

7.3 Граничные условия

Граничные условия могут быть получены путем задания смещения и поверхностного натяжения на дополнительных частях Γ_1 и Γ_2 границы Ω соответственно. Граничное условие смещения просто форма

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(p, t), \quad (7.11)$$

где $\hat{u}$ — заданное векторное поле на $\Gamma_1 \times [0, T]$.

Обработка поверхностного сцепления более сложна. Во-первых, предположим, что вектор поверхностного сцепления s на деформированной поверхности $\chi(\Gamma_2, t)$ нормален к касательной плоскости деформированной граничной поверхности, так что

$$c(x, t) = g(x, t)m(x),$$

где $m(x)$ — единичная нормаль на деформированной конфигурации, $x \in \chi(\Gamma_2, t)$ для любого t , а $g(x, t)$ — заданная скалярная функция. Можно показать, что это эквивалентно указанию значений S_n таким образом, что

$$S_n = g(\det F) F^{-T} n \text{ на } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (7.12)$$

где $n = n(p)$ — нормальный вектор к границе Ω и $\hat{g} = \hat{g}(p, t) = g(x(p, t), t)$. Ограничение (7.12) приводит к появлению нелинейного силового члена, который обрабатывается в вычислительном решении итеративно с использованием аппроксимации с запаздывающим значением.

Поверхностное натяжение s также можно определить, задав его компоненты относительно системы отсчета таким образом, что

$$s(x(p, t), t) = \hat{s}(p, t), \quad (7.13)$$

с заданным вектором $\hat{s}(p, t)$. В то время как условие (7.13) определяет фактическую силу на единицу площади деформированной поверхности, также возможно напрямую определить псевдотягу $s = S_n$, которая дает фактическую силу на единицу недеформированной площади. Если псевдотяга указана на Γ_2 как

$$s^0(p, t) = \hat{s}^0(p, t), \quad (7.14)$$

Тогда общая сила, действующая через Γ_2 , определяется поверхностным интегралом

$$\int_{\Gamma_2} s^0 d\Gamma.$$

C2

Если используется альтернатива (7.13), то полная сила получается по формуле

$$\int_{\Gamma_2} \hat{s}(\det F) n \cdot (F^{-1} F^{-T}) n d\Gamma$$

C2

где дополнительный скалярный член в подынтегральном выражении относится к изменению площади при деформации.

7.4 Линеаризация: основные конститутивные законы

Для обработки модели вычислительно необходимо также линеаризовать конститутивный закон $S = \hat{S}(F) = F \Sigma(F)$, где $\Sigma(F) = \Sigma^{-1}(F^{-1} F)$. Это можно сделать в терминах производной $DS^*(F)[U]$, используя приближение Ньютона

$$\hat{S}(F_{k+1}) \approx \hat{S}(F_k) + DS^*(F_k)[F_{k+1} - F_k].$$

Тогда у нас есть

$$\hat{S}(F_{k+1}) \approx \hat{S}(F_k) + F_k D\Sigma(F_k)[F_{k+1} - F_k] + (F_{k+1} - F_k) \Sigma(F_k).$$

Ввиду того, что $F_{k+1} - F_k = u_{k+1} - u_k$, это приводит к линеаризации

$$\begin{aligned} \hat{S}(F_{k+1}) &\approx \hat{S}(F_k) + F_k D\Sigma(F_k)[u_{k+1} - u_k] + (u_{k+1} - u_k) \Sigma(F_k) \\ &= \hat{S}(F_k) - F_k D\Sigma(F_k)[u_k] - u_k \Sigma(F_k) + F_k D\Sigma(F_k)[u_{k+1}] + u_{k+1} \Sigma(F_k). \end{aligned} \quad (7.15)$$

В случае (7.2) производная функции отклика Σ определяется выражением

$$D\Sigma(F)[v] = \frac{\lambda}{2} \text{tr}(F^T v + v^T F) I + \mu(F^T v + v^T F),$$

пока

$$DS(F)[v] = \lambda(\det F)^{-2} \text{tr}(v F^{-1}) C(F)^{-1} + \frac{\lambda}{(\mu + (\det F)^{-1})(\det F + 1)} C(F)^{-2} [F^T v + v^T F] C(F)^{-1}$$

для нео-гуковского материала, подчиняющегося (7.3). При вычислении связанной тангенциальной матрицы жесткости, которая получается в результате подстановки аппроксимации (7.15) в дискретную версию слабой формулировки (7.1), справедливо следующее свойство самосопряженности

$$FkD\Sigma(Fk)[u_{k+1}] \cdot v + u_{k+1} \Sigma(Fk) \cdot v = FkD\Sigma(Fk)[v] \cdot u_{k+1} + v \Sigma(Fk) \cdot u_{k+1}$$

также используется.

Когда рассматривается почти несжимаемый нео-гуковский материал, нам необходимо линеаризовать обе составляющие реальный закон $S = \hat{S}(F, p) = F \Sigma(F, p)$, где $\Sigma(F, p) = \Sigma^{-1}(F^T F, p)$, и ограничение

$$\varphi(F, p) = 0 \quad (7.16)$$

где

$$\varphi(F, p) = \varepsilon p + 1/2(\det F)^{-2} - 1/2 \quad (7.17)$$

с

$$\varepsilon = 1/\text{мин.} \quad (7.18)$$

Обновления Ньютона, связанные с решением (7.16), задаются следующим образом:

$$(\det F_k)^{-2} \text{tr}[(F_{k+1} - F_k) F_k^{-1}] + \varepsilon(p_{k+1} - p_k) = \varphi(F_k, p_k). \quad (7.19)$$

Чтобы получить линеаризацию Ньютона функции реакции на напряжение, отметим, в частности, что производная функции $G(F, p) = p C(F)^{-1}$ дается

$$DG(F, p)[(U, h)] = h C(F)^{-1} + p C(F)^{-1} [F^T U + U^T F] C(F)^{-1}.$$

Из этого следует, что

$$D\Sigma(F, p)[(U, h)] = h C(F)^{-1} + (p + \mu) C(F)^{-1} [F^T U + U^T F] C(F)^{-1}. \quad (7.20)$$

7.5 Линеаризация: случай пользовательской модели материала

Другие конститутивные законы могут быть определены путем включения пользовательской модели материала в форме пользовательской подпрограммы Abaqus (UMAT). В отличие от других конститутивных законов, такая подпрограмма должна возвращать напряжение Коши, соответствующее текущей оценке приращения деформации относительно предыдущего сходящегося решения (решения до приращения времени/нагрузки), а также производную функции реакции на напряжение для вычисления дифференциала (7.10).

Следует отметить, что, несмотря на опору на напряжение Коши, слабая формулировка все еще генерируется из уравнений равновесия, выраженных в терминах первого напряжения Пиолы-Кирхгофа. Расчеты мощности напряжения, таким образом, производятся в терминах энергетически сопряженной пары первого напряжения Пиолы-Кирхгофа и скорости изменения градиента деформации. Для этого, ввиду (7.7)–(7.9), рассмотрим отображение

$$F \mapsto \hat{S}(F) = (\det F) \{\sigma^-(\cdot, q) - \hat{E}(F)\} F^{-T} \quad (7.21)$$

и использовать (7.10) для получения дифференциала Фреше

$$D\hat{S}(F)[U] = (\det F) \{D\sigma^-(\hat{E}(F), q)[D\hat{E}(F)[U]]\} F^{-T} - 1) \sigma^-(\hat{E}(F), q) F + (\det F) \text{tr}(U F^{-T}) (\det F) \sigma^-(\hat{E}(F), q) F^{-T} U^T F^{-T}. \quad (7.22)$$

Таким образом, при дифференциации переменные состояния рассматриваются как параметры. В случае пользовательской модели материала уравнение (7.22) обеспечивает ключевой ингредиент для линеаризации.

7.6 Расчет напряжений и деформаций

В дополнение к решению для смещения решатель может производить поля деформации и напряжения, связанные с решением. В этой связи тензор деформации определяется выражением (7.4). При вычислении напряжения производится материальное описание обычного напряжения Коши σ . То есть мы измеряем поверхностную силу на единицу площади в деформированной конфигурации и записываем $\sigma(\mathbf{p}, t) = \sigma(\mathbf{x}(\mathbf{p}, t), t)$. Заметим, что это напряжение связано с одним из напряжений Пиолы-Кирхгофа как

$$\sigma = (\det F)^{-1} S F^T = (\det F)^{-1} F \Sigma^T(C) F^T. \quad (7.23)$$

7.7 Ключевые слова

Моделирование

При указании ключевых слов для раздела моделирования следует учитывать, что не все системы координат поддерживаются.

Строка системы координат Система

координат может быть декартовой 2D, декартовой 3D или осесимметричной.

Идентификатор материала

Следующие ключевые слова относятся к заданию параметров материала для решателя конечной упругости.

Плотность *Real* Это

ключевое слово используется для определения поля плотности ρ_0 , соответствующего эталонной конфигурации.

Коэффициент Пуассона *Реальный*

Значения скалярных параметров материала Ламе зависят от коэффициента Пуассона, как и в случае решателя линейной упругости. Коэффициент Пуассона задается с помощью этого ключевого слова.

Модуль Юнга *Действительный*

Значения скалярных параметров материала Ламе зависят от модуля Юнга, как и в случае решателя линейной упругости. Это ключевое слово задает значение модуля Юнга.

Файл подпрограммы UMAT

Значение этого ключевого слова состоит из двух строковых параметров. Первый параметр указывает имя скомпилированного файла, содержащего определение пользовательской модели материала в форме UMAT. Второй параметр определяет имя пользовательской подпрограммы. Если используется это ключевое слово, все модели материалов должны быть определены в форме UMAT.

Число материальных констант *Целое число*

Значение этого ключевого слова определяет количество материальных констант, которые передаются в подпрограмму UMAT.

Константы материалов *Реальные*

Значения констант материала передаются в подпрограмму UMAT.

Число переменных состояния *Целое число* Это ключевое

слово используется для объявления числа переменных состояния.

Имя *Строка*

Это ключевое слово может использоваться для определения аргумента имени подпрограммы UMAT.

Уравнение eq id

Plane Stress *Logical* Если выбрана

декартова 2D система координат, это ключевое слово может быть использовано для активации нелинейного анализа плоского напряжения. В случае плоского напряжения определение параметра Ламе λ изменяется таким образом, что компоненты плоского напряжения напрямую получаются через компоненты плоской деформации. Затем деформация E33 может быть выражена как $E_{33} = -\nu / (1 - \nu)(E_{11} + E_{22})$.

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения [ElasticSolver]

Описывающее имя для решателя. Его можно изменить, но оно должно быть указано,

Файл процедуры "ElasticSolve" "ElasticSolver"

Имя подпрограммы решателя.

Неогуковская материальная логика

По умолчанию используется конститутивный закон (7.2). Переключение на неогукианскую материальную модель (7.3) можно выполнить, задав значение True для этого ключевого слова.

Смешанная формулировка Логическая Это

ключевое слово используется для работы с несжимаемым или почти несжимаемым материалом, подчиняющимся нео-Гуковому конститутивному закону. Если для этого ключевого слова задано значение True, поле p принимается как дополнительное неизвестное, которое решается при ограничении (7.5). В этом случае решатель предполагает, что файлы сетки соответствуют конечным элементам низшего порядка (приближение давления низшего порядка вместе с приближением смещения второго порядка затем строится по умолчанию). Кроме того, имена по умолчанию для переменной смещения u и переменной давления p тогда $Disp$ и $Pres$ соответственно.

Вычислить деформации Логический Если

для этого ключевого слова задано значение True, деформации также вычисляются. Компоненты деформации выводятся в упорядоченный шестикортеж как $(E_{xx} E_{yy} E_{zz} E_{xy} E_{yz} E_{xz})$. Однако в аксиально-симметричном моделировании производятся только четыре компонента как $(E_{xx} E_{zz} E_{yy} E_{xy})$ с соглашением $x = r$ и $z = \theta$.

Вычислить напряжения Логический Если для

этого ключевого слова задано значение True, также вычисляется напряжение Коши (7.23). Компоненты напряжения выводятся в упорядоченный шестизначный кортеж таким же образом, как и деформация.

Рассчитать главный логический

Если активировано вычисление деформации или напряжения, это ключевое слово можно использовать для активации вычисления главных компонент.

Вычислить PAgle Логический

Это ключевое слово можно использовать для активации вычисления главных углов тензора напряжений. Если для этого ключевого слова задано значение True, то также активируется вычисление главных компонент.

Инициализация переменных состояния Логическая

Если модель материала определена в терминах пользовательской модели материала (UMAT), можно выполнить дополнительный вызов подпрограммы UMAT для получения переменных состояния в исходном состоянии (предполагается, что начальное состояние не имеет напряжений).

Сила тела $b_f id$ Этот раздел

можно использовать для определения сил тела.

Инерционная сила тела j Действительная

Это ключевое слово может быть использовано для задания компонента j силы тела $b(x, t)$ для определения $b_0 = \rho_0(p)b(x(p, t), t)$. Следует отметить, что в этом случае $b(x, t)$ определяет силу тела на единицу массы. При этом изменения плотности учитываются корректно, т.е. соблюдается условие $\rho(x(p, t), t) \det F(p, t) = \rho_0(p)$.

Стресс Bodyforce j Real

Это ключевое слово может быть использовано для задания компонента j объемной силы $b(x, t)$ для определения $b_0 = (\det F)b(x(p, t), t)$. Отмечается, что $b(x, t)$ теперь является объемной силой на единицу объема деформированного тела, поэтому этот тип силы подходит для указания истинных объемных сил, какими бы они ни были.

Граничное условие `bc id`

Условия Дирихле (7.11) для переменной смещения решателя могут быть заданы стандартным образом. Другие варианты задания граничных условий поясняются ниже.

Нормальная поверхность Сцепление `Реальное`

С помощью этого ключевого слова можно задать поверхностную силу, которая нормальна к деформированной границе и дает силу на единицу площади деформированной поверхности.

Поверхностное сцепление `k Реальное`

По умолчанию это ключевое слово может использоваться для указания фактической силы на единицу площади деформированной поверхности. Значение этого ключевого слова затем определяет компонент $k \hat{s}$ в (7.13). Если также задана ключевая команда `Pseudo-Traction = True`, то значения этой ключевой команды используются для определения компонентов вектора псевдотяги $\hat{s}_0$, который дает фактическую силу на единицу недеформированной площади.

Логика псевдотяги

Если это ключевое слово имеет значение `True`, то поверхностная сила определяется через условие псевдотяги; см. объяснение ключевого слова `Surface Traction k` ниже.

Spring `Real` Это

ключевое слово можно использовать для создания силы реакции, которая совпадает с нормальным направлением недеформированной конфигурации и пропорциональна смещению в нормальном направлении.

Spring `i Real` Это

ключевое слово похоже на ключевое слово `Spring`, но здесь коэффициенты пружины определяются относительно осей координат.

FSI `BC` Логический Если

это ключевое слово имеет значение `True`, то для определения поверхностной силы, создаваемой потоком, используется решение Навье-Стокса.

уравнения значительно упрощаются по сравнению со случаем общих криволинейных координат.

Упомянется, что этот решатель также может быть адаптирован для обработки особых случаев, когда точная параметризация срединной поверхности оболочки линиями координат кривизны может быть задана глобально. В этом случае применяется подход классической теории оболочек, поэтому математическая формулировка выполняется над двумерной (плоской) опорной областью.

8.2 Модель дискретной оболочки

Рассматриваемые нами модели оболочек используют кинематические предположения, которые позволяют аппроксимировать трехмерные уравнения упругости без дополнительных предположений о состоянии напряжения. Простейшее предположение соответствует использованию твердых конечных элементов, которые имеют узлы, расположенные на верхней и нижней поверхностях оболочки, вместе со вспомогательными степенями свободы, чтобы обеспечить нормальное поле деформации, которое линейно зависит от нормальной координаты. Обычные двумерные модели оболочек затем могут быть получены путем наложения условия исчезновения нормального напряжения, но использование уточненной модели оболочки также может быть рассмотрено в этой настройке.

8.2.1 Предварительные данные

Теперь мы можем представить себе физический элемент поверхности $S = \phi(K)$, связанный с физическим элементом твердого тела $\Omega \subset \mathbb{E}^3$, который является образом множества $S \times [d/2, d/2]$ при отображении нормальных координат

$$(p, y_3) \mapsto p + y_3 \mathbf{a}_3(\phi(p)), \quad (8.1)$$

где d — толщина оболочки, а поверхностная функция $p \mapsto \mathbf{a}_3(\phi(p))$ давая единицу, нормальную к срединной поверхности в точке $p \in S$ в терминах векторного поля $\mathbf{a}_3 : K \rightarrow \mathbb{R}^3(p, y_3)$. Так как нормальные координаты $S \times [d/2, d/2]$ таким образом идентифицирует точку в физическом элементе Ω , естественно аппроксимировать поэлементное ограничение векторного поля перемещений оболочки

$$\mathbf{u} : S \times [d/2, d/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, (p, y_3) \mapsto \mathbf{u}(p, y_3), \quad (8.2)$$

систематическим образом, таким образом, чтобы

$$\mathbf{u}(\phi(K(y), y_3)) = \mathbf{u}^*(y, y_3) = \mathbf{v}(0)(y) + y_3 \mathbf{v}(1)(y) + \frac{1}{2} (y_3)^2 \mathbf{v}(2)(y), \quad (8.3)$$

полями $\mathbf{v} : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ в двух переменных, взятых в качестве неизвестных. Математическая область определения для трехмерных оболочечных переменных будет, таким образом, множеством $\Omega_K = K \times [d/2, d/2]$, точки которого отображаются в точки физического пространства $\mathbb{E}^3$ как

$$(y, y_3) \mapsto \Theta(y, y_3) = \phi(K(y)) + y_3 \mathbf{a}_3(y). \quad (8.4)$$

Это представление геометрии следует из записи альтернативного ссылочного описания нормального представления координат, определенного формулой (8.1).

Каждой физической точке $\Theta(y, y_3)$ оболочки можно сопоставить три вектора

$$\mathbf{g}_k(y, y_3) = D\Theta(y, y_3)[\mathbf{e}^k] = \mathbf{k}\Theta(y, y_3), \quad (8.5)$$

где $\mathbf{e}^k$ — ортонормированные базисные векторы, связанные с математической областью определения, чтобы дать ковариантный базис для пространства трансляций $\mathbb{E}^3$. Аналогично, ограничиваясь срединной поверхностью, мы определяем $\mathbf{R}$, набора базисных векторов поверхности $\mathbf{a}_i : K \rightarrow \mathbb{R}^3$, который дает ковариантный базис при $p = \phi(K(y))$, через

$$\mathbf{a}_\alpha(y) = D\phi(K(y))[\mathbf{e}^\alpha] = \mathbf{a}\phi(K(y), \mathbf{a}_3(y)) \cdot \mathbf{a}_\alpha(y) = 0. \quad (8.6)$$

Ковариантные компоненты тензора метрической поверхности A (первая фундаментальная форма) теперь задаются выражением

$$A_{\alpha\beta}(y) = \mathbf{a}_\alpha(y) \cdot \mathbf{a}_\beta(y). \quad (8.7)$$

Мы также определяем $\mathbf{B}_{\alpha\beta} : K \rightarrow \mathbb{R}$ как

$$\mathbf{B}_{\alpha\beta}(y) = \mathbf{a}_3(y) \cdot \mathbf{a}_\alpha(y) \cdot \mathbf{a}_\beta(y) = \mathbf{a}_\alpha(y) \cdot \mathbf{B}_{\beta 3}(y). \quad (8.8)$$

Они дают ковариантные компоненты второй фундаментальной формы В поверхности при $p = \Phi K(y)$. Нам также понадобятся контравариантные базисные векторы a^{α} поверхности, удовлетворяющей условиям ортогональности

$$a_i(y) \cdot a^{\alpha}(y) = \delta^{\alpha}_i, \quad (8.9)$$

где δ^{α}_i — символ Кронекера.

При использовании линий координат кривизны два набора базисных векторов связаны соотношением

$$g_1(y, y_3) = \mu^1(y, y_3) a_1(y), \quad g_2(y, y_3) = \mu^2(y, y_3) a_2(y), \quad g_3(y, y_3) = a_3(y) \quad (8.10)$$

β , где μ — смешанные компоненты диагонального (шифтерного) тензора. Тогда мы имеем

$$\mu^1(y, y_3) = 1 + y^3/R_1(y), \quad \mu^2(y, y_3) = 1 + y^3/R_2(y) \quad (8.11)$$

с

$$\frac{1}{R_1(y)} = \frac{B_{11}(y)}{A_{11}(y)} = B^1_1(y) \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_2(y)} = \frac{B_{22}(y)}{A_{22}(y)} = B^2_2(y) \quad (8.12)$$

являющиеся главными кривизнами. Соглашение о знаках здесь выбрано таким образом, что главные радиусы кривизны $R_\alpha > 0$, если нормальный вектор направлен от центра кривизны.

Можно выбрать два различных кинематических предположения в форме (8.3). Наиболее общая версия (8.3) приводит к обработке девяти скалярных полей как неизвестных. Простейшее кинематическое предположение, которое не требует введения дополнительного предположения о напряженном состоянии, однако соответствует выбору (2), где часть v может быть выражена просто как

$$v^2(y) = [v^2(y) \cdot a_3(y)] a^3(y), \quad (8.13)$$

т. е. только одно скалярное поле описывает часть второго порядка относительно y^3 . Полученное кинематическое предположение таким образом, вовлекается семь скалярных полей (для оригинальных вкладов, которые используют это ограничение, см. исторические заметки в [4] и статьи Рейсснера и Нагди, упомянутые там). Предположение, что включена только одна квадратичная компонента в y , мотивируется возможностью разложения всех компонентов линеаризованного тензора деформации до членов первого порядка по y . На практике, особенно в контексте линейной теории, этот выбор позволяет вывести вариационную формулировку, которая не требует решения части (8.13) как тесно связанной (к) с другими неизвестными, т. е. ее значения могут быть найдены впоследствии, когда $v_k = 0, 1$, были предварительно решены.

8.2.2 Мера деформации

Мера трехмерной деформации, которую мы используем, основана на тензорном поле деформации Грина-Сен-Венана $E(u^{\wedge}) : \Omega \rightarrow \text{Sym}$, связанном с поэлементным ограничением $u^{\wedge}$ поля смещения. Его компоненты измеряют изменение метрического тензора, связанного с полем смещения, и определяются таким образом, что

$$2E_{ij}(u^{\wedge})(\cdot) = g_i(\cdot) \cdot j u^{\wedge}(\cdot) + i u^{\wedge}(\cdot) \cdot g_j(\cdot) + [i u^{\wedge}(\cdot)] \cdot [j u^{\wedge}(\cdot)]. \quad (8.14)$$

На практике мы выполним смену базиса, чтобы выразить поле тензора деформации как

$$E(u^{\wedge})(y, y_3) = E_{ij}(u^{\wedge})(y, y_3) a^{\alpha}(y) a^{\beta}(y),$$

так что компоненты затем выражаются относительно базисных векторов поверхности, зависящих только от двух криволинейных координат срединной поверхности. В качестве альтернативы, наиболее базовое представление деформации следует путем переключения на локальный ортонормированный базис $\{e_1(y), e_2(y), e_3(y)\} = \{e_1(y), e_2(y), e_3(y)\}$ получено как

$$e_{\alpha}(y) = \frac{a_{\alpha}(y)}{|a(y)|} a^{\alpha}(y), \quad \text{при этом } A_{\alpha}(y) = |a(y)|, \quad (8.15)$$

и писать тогда

$$E(u^{\wedge})(y, y_3) = E^{\wedge}_{ij}(u^{\wedge})(y, y_3) e^{\alpha}(y) e^{\beta}(y).$$

Можно показать, что компоненты этих представлений подчиняются следующим правилам преобразования (здесь принято соглашение о суммировании, так что повторяющийся индекс, одновременно появляющийся как нижний индекс и как

Верхний индекс в термине подразумевает суммирование по всем возможным значениям, при этом греческий индекс, однако, может иметь значения в $\{1, 2\}$

$$E^{\alpha\beta}(u^{\wedge}) = \frac{E\alpha\beta(u^{\wedge})}{A\alpha A\beta} = \frac{(M^1)_{\text{является}}}{A\alpha A\beta} v^{\beta} E^{-\lambda\nu}(u^{\wedge}), \quad E^{\alpha 3}(u^{\wedge}) = \frac{E\alpha 3(u^{\wedge})}{A\alpha} = \frac{(M^1)_{\nu} v^{\alpha} E^{-\nu 3}(u^{\wedge})}{A\alpha},$$

$$33(u^{\wedge}) = E33(u^{\wedge}) = E^{-33}(u^{\wedge}).$$

Позволяя $U = (v_1, v_2, \dots)$ обозначать n -кортеж двумерных скалярных полей, которые определяют $u^{\wedge}$, мы затем расширяем, компоненты тензора деформации по степеням нормальной координаты y чтобы получить приближение первого порядка

$$\text{Пусть } (u^{\wedge}(U))(y, y_3) = \gamma_{ij}(U)(y) + i_j(U)(y) - y_3 k_{ij}(U)(y) - y_3 \chi_{ij}(U)(y) \quad (8.16)$$

где двумерные поля $\gamma_{ij}(U) : K \rightarrow R$ и $k_{ij}(U) : K \rightarrow R$ линейны относительно U , тогда как $i_j(U) : K \rightarrow R$ и $\chi_{ij}(U) : K \rightarrow R$ нелинейны. Если оболочка претерпевает только небольшие прогибы, линейризацию можно дополнительно выполнить, опустив нелинейные члены, чтобы записать тогда

$$E_{ij}(u^{\wedge}(U)) = \gamma_{ij}(U) - y_3 k_{ij}(U).$$

Отметим, что компоненты касательной плоскости $\gamma\alpha\beta(U)$ и $k\alpha\beta(U)$ представляют собой так называемые тензоры мембранной деформации и деформации изгиба, тогда как $\gamma\alpha 3(U)$ представляют собой деформации поперечного сдвига.

Когда мы упрощаем запись, устанавливая

$$(0) \quad (1) \quad (2) \quad \beta, v \quad \psi, v \quad v, v \quad (8.17)$$

компоненты линейризованных тензоров деформации имеют следующие бескомпонентные представления (бескомпонентность следует понимать по отношению к перемещениям):

$$\begin{aligned} 2\gamma\alpha\beta(U) &= a\alpha \cdot \beta v + a\nu \cdot a\beta, \quad 2\gamma\alpha 3(U) \\ &= a3 \cdot a\nu - a\alpha \cdot \beta, \quad \gamma 33(U) = \beta \cdot \\ a3, \quad \alpha\alpha(U) &= a\alpha \cdot a\beta \\ \alpha\alpha, \quad 2k_{12}(U) &= a_1 \cdot 2\beta + 1\beta a_2 \\ k_{2a1} \cdot 2v \cdot k_1 \cdot 1v a_2, \quad 2k_3(U) &= a3 \cdot a\beta - k_{a3} \cdot a\nu + \psi a\alpha, \quad k_{33}(U) = \\ \psi \cdot a3, \end{aligned} \quad (8.18)$$

с $k_1 \cdot B_1$ и $k_2 \cdot B_2$. С другой стороны, нелинейные части тензоров деформации можно выразить как

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta(U) &= a\nu \cdot \beta v, \quad 2\alpha 3(U) \\ &= \beta \cdot a\nu, \\ 33(U) &= 1/2 \beta \cdot \beta, \\ 2\chi\alpha\beta(U) &= a\nu \cdot \beta\beta + a\beta \cdot \beta v - (k_1 + k_2) a\nu \cdot \beta v, \quad 2\chi\alpha 3(U) = \beta \\ a\beta + \psi a\nu + k\alpha\beta a\nu, \quad \chi 33(U) &= \beta \cdot \psi. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Следует отметить, что при наших кинематических предположениях выражение для линейризованной нормальной деформации имеет вид

$$\gamma 33(U) - y_3 k_{33}(U) = \beta_3 - y_3 \psi_3, \quad (8.20)$$

поэтому мы не можем, как правило, выйти за пределы линейных членов по y в разложениях деформаций. Это, как правило, мотивирует наш выбор усечения выражений для деформаций, как это сделано в (8.16). Кроме того, ожидается, что члены типа $\gamma\alpha k(U)$ в выражениях для $k_{ij}(U)$ будут иметь небольшое влияние на энергию деформации тонкого Оболочка $B\alpha\beta$ и поэтому может быть опущена для получения упрощенных выражений.

Примечательно, что производные ψ не встречаются в выражениях для деформаций, когда учитываются только первый порядок по y члены до. Когда ищутся слабые решения уравнений оболочек,

компоненты ψ , таким образом, рассматриваются как исключительные в том смысле, что можно предположить меньшую регулярность. Кроме того, в контексте линейной теории вместе с ограничением (8.13) ψ входит только через свою нормальную компоненту ψ_3 в выражение для $\kappa_{33}(U)$. В этом случае может быть получена вариационная формулировка задачи оболочек, так что она не требует решения ψ_3 как тесно связанной с другими неизвестными, т.е. ее значения могут быть (k) найдены впоследствии, когда $\forall k = 0, 1$, были сначала решены. В контексте нелинейной теории такое упрощение не может быть достигнуто полностью последовательным образом, и использование девятикомпонентной модели оболочек может быть более естественным выбором. Если девятикомпонентная модель не используется и нелинейности учитываются, решатель оболочек пренебрегает неполной частью $\psi \cdot \alpha v$ в выражении для $\chi_{\alpha 3}(U)$, так что (k) формулировка в терминах v , $k = 0, 1$, может быть получено.

8.2.3 Принцип виртуальной работы

Для упрощения формулировки принципа виртуальной работы сократим теперь выражения для компонент деформации, опустив разбиение на линейную и нелинейную части, так что

$$E(u^{\wedge}(U)) = \varepsilon(U) \quad y \quad 3\rho(U) \quad (8.21)$$

с

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad (8.22)$$

В настоящее время решатель оболочек может обрабатывать только нелинейное расширение стандартного конститутивного закона для изотропного материала, характеризующегося модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . То есть, мы предполагаем, что

$$\Sigma^{ij}(\cdot) = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [E^{11}(u^{\wedge}(\cdot)) + E^{22}(u^{\wedge}(\cdot)) + E^{33}(u^{\wedge}(\cdot))\delta_{ij} + (1 + \frac{\nu}{1 + \nu}) E^{ij}(u^{\wedge}(\cdot))] \quad (8.23)$$

где скалярные поля $\Sigma^{ij} : \Omega_K \rightarrow \mathbb{R}$ являются компонентами второго напряжения Пиолы-Кирхгофа относительно ортонормированного базиса. Ожидается, что эта модель осуществима, когда растяжения оболочки остаются относительно малыми, в то время как возможны деформации жесткого тела произвольной величины.

Формулировку трехмерного принципа виртуальной работы теперь можно представить в виде

$$DU(U)[V] = Q(U, V)$$

где $DU(U)[V]$ дает производную энергии деформации, а $Q(U, \cdot)$ — линейный функционал, определяемый нагрузками. Отметим, что линейный функционал не всегда зависит от решения U . В этом случае мы могли бы упростить формулировку принципа виртуальной работы как

$$DU(U)[V] = L(V),$$

где $L(\cdot)$ является линейным функционалом, независимым от U . Энергия деформации выражается поэлементно как

$$\text{Великобритания}(V) = \int_{\Omega_K} W(E(u^{\wedge}(U))(y, y_3)) g(y, y_3) dy dy_3, \quad (8.24)$$

где $W : \text{Sym} \rightarrow \mathbb{R}$ дает плотность энергии деформации, а $g(y, y_3)$ обозначает определитель трехмерного метрического тензора. Вклад в принцип виртуальной работы тогда может быть выражен как

$$\int_{\Omega_K} R(E(u^{\wedge}(U))(y, y_3)) \cdot DE(u^{\wedge}(U))[V](y, y_3) g(y, y_3) d\Omega_K = Q_K(U, V) \quad (8.25)$$

для всех кинематически допустимых V , причем второе поле напряжений Пиолы-Кирхгофа $\Sigma(\cdot) = R(E(u^{\wedge}(U))(\cdot))$ находится как производная $R(E) \cdot H = DW(E)[H]$.

По-настоящему двумерная вариационная формулировка получается при использовании (8.21) в сочетании с (8.24) и выполнении интегрирования по толщине оболочки. При интегрировании мы решили пренебречь членами

$O(d/Ra)$ для упрощения окончательного утверждения двумерной версии принципа виртуальной работы. При использовании ограничения (8.13) после некоторого сокращения энергия деформации по K может быть выражена как

$$\begin{aligned}
 UK(U) = & 2(1 - \frac{\nu}{2}) \frac{Ed}{K} \int_K v[\epsilon_{11}(U) + \epsilon_{22}(U)]^2 + (1 - \nu) \frac{1}{a} \int_{a, \beta=1}^2 [e_{ab}(U)]^2 dK - \\
 & \frac{Ed(1 - \nu)}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{1}{K} \int_K \epsilon_{33}(U) + 1 \frac{H}{n} [\epsilon_{11}(U) + \epsilon_{22}(U)]^2 \frac{1}{a} dK - \\
 & + \frac{Ed}{1 + H} \frac{1}{K} \int_K [(\epsilon_{13}(U))^2 + (\epsilon_{23}(U))^2] \frac{1}{a} dK - \\
 & + \frac{Ed}{24(1 - \nu)} \frac{1}{K} \int_K v[\rho_{11}(U) + \rho_{22}(U)]^2 + (1 - \nu) \frac{1}{a} \int_{a, \beta=1}^2 [r_{ab}(U)]^2 dK - \\
 & + \frac{Ed}{12(1 + \nu)} \frac{1}{K} \int_K [(\rho_{13}(U))^2 + (\rho_{23}(U))^2] \frac{1}{a} dK -
 \end{aligned} \quad (8.26)$$

где a — определитель тензора метрической поверхности.

8.2.4 Формулировка в терминах декартовых компонент

Бескомпонентные выражения для деформаций (бескомпонентность следует понимать по отношению к смещениям) позволяют аппроксимировать уравнения оболочек непосредственно в терминах ортогональных декартовых компонент векторных полей (8.17). Переменными решателя оболочек являются, таким образом, декартовы компоненты относительно глобальной системы отсчета.

Если рассмотреть деформации, подобные вращению, вызванные моментными нагрузками, то можно увидеть, что более интуитивно понятные деформации вращения подобные переменные могут следовать, записывая смещение как (ср. (8.3) при ограничении (8.13))

$$u^i = v^j y^3 [a_3 \times \theta + (\theta \cdot a_3) a^3] + \frac{1}{2} (y^3)^2 (\psi \cdot a_3) a^3, \quad (8.27)$$

так что части первого порядка по y^3 связаны между собой

$$\beta \times a_3 = a_3 \times \theta \times a_3, \quad \beta \cdot a_3 = \theta \cdot a_3.$$

При выборе этой опции, помимо глобальных компонент смещения срединной поверхности, глобальными переменными модели являются поля компонент

$$\theta_k = \theta \cdot e_k,$$

где e_k — базисные векторы глобальной системы координат.

8.2.5 Операторы уменьшения деформации против приближений высокого порядка

Эффективная и надежная дискретизация конечных элементов уравнений оболочек является сложной задачей, и нерешенные вопросы все еще остаются. Задачи оболочек могут демонстрировать различные типы асимптотического поведения, когда толщина оболочки стремится к нулю [1]. Большой проблемой для проектировщика конечных элементов является разработка формулировки, которая работает для всех возможных асимптотических сценариев. Конечной задачей было бы сопроводить метод математическим анализом ошибок, охватывающим всю универсальность задач оболочек.

По указанным выше причинам применение стандартных конечных элементов не является вариантом, если не используются базисные функции высокой степени (p-версия FEM), поскольку стандартные методы низкого порядка не подходят для аппроксимации полей с пренебрежимо малыми деформациями мембраны и поперечного сдвига (такой случай соответствует асимптотическому поведению с преобладанием изгиба). Это относится к вычислительной проблеме, известной как блокировка конечных элементов. Для получения лучших методов низкого порядка решатель оболочек Элмера использует операторы уменьшения деформации, которые применяются к деформациям мембраны и поперечного сдвига и разработаны, в первую очередь, для ослабления ограничений, возникающих в

случай задач с преобладанием изгиба. В настоящее время операторы уменьшения деформации разработаны только для приближения низшего порядка (треугольник с тремя узлами или четырехугольник с четырьмя узлами) при ограничении (8.13).

Аппроксимация с иерархическими p -элементами также может быть применена, но и в этом случае вычислительная модель поверхности основана на реконструкции поверхности, полученной из информации о положении поверхности и векторе директора в узлах фоновой сетки. В настоящее время внутренняя реконструкция поверхности основана на отображенных полиномах степени 3, поэтому точность не должна быть оптимальной для всех порядков элементов, поскольку геометрические ошибки в конечном итоге доминируют над ошибкой. Однако численная чрезмерная жесткость из-за блокировки может быть эффективно обработана с помощью конечных элементов достаточно высокого порядка, поэтому даже неоптимальная комбинация аппроксимации может улучшить решение, если доминирующая ошибка вызвана блокировкой. Обратите внимание, что версия высокого порядка не применяет никаких операторов уменьшения деформации для смягчения блокировки, поэтому при таком подходе увеличение порядка полинома является единственным способом справиться с блокировкой. P -аппроксимация не требует использования ограничения (8.13).

8.3 Указание данных поверхности

Для улучшения аппроксимации срединной поверхности оболочки решателю оболочек нужна информация о векторе директора. В качестве альтернативы данные о директоре узлов могут быть считаны из файла или могут быть связаны с обычной переменной Элмера "Director", которая была решена до выполнения решателя оболочек. Следует отметить, что параллельные версии форматов файлов, используемых в связи с чтением из файлов, пока не существуют, поэтому на данный момент параллельные вычисления возможны только тогда, когда поле директора сделано доступным как переменная Элмера "Director".

Данные узлового директора могут быть отформатированы в специальные файлы данных двумя способами. Первый вариант — написать файл `mesh.director`, который перечисляет директора в узлах аналогично тому, как узлы определены в файле `mesh.nodes`. То есть содержимое файла `mesh.director` должно быть организовано как

```
n1 от dx до dx n2
от dx до dx
...
nn от dx до dx
```

Первое целое число — это идентификационный номер узла, за которым следуют три действительных числа, которые являются компонентами директора относительно глобальной системы координат. Файл должен располагаться в том же месте, что и стандартные файлы сеток.

Второй вариант — предоставить файл `mesh.elements.data`, который должен определять узлового директора поэлементно и связывать имя «директор» с этими данными. Таким образом, если даны только данные директора, содержимое файла должно быть организовано как

```
элемент: element_id_1 директор: dx_1
dy_1 dz_1 ... dx_n dy_n dz_n конец
```

```
элемент: ...
...
конец
```

Здесь порядок данных директора по узлам в строках, начинающихся с `director:`, должен соответствовать порядку файла `mesh.elements`. Также этот файл должен располагаться в том же месте, что и стандартные файлы сеток. Отмечено, что файл `mesh.elements.data` считается первым по приоритету. При желании, имея файл `mesh.director`, решатель может записать данные директора как поэлементное свойство в файл, формат которого соответствует файлу `mesh.elements.data`. Поэлементные данные, содержащиеся в `mesh.elements.data`, могут, как правило, быть прерывистыми по соседним конечным элементам.

Один из способов создания переменной Элмера "Director" — использовать решатель `NormalSolver`, который использует фоновую сетку для вычисления вектора нормали. Такой подход может поставить под угрозу точность геометрической модели, но допускает параллельные вычисления. Для особых случаев, когда зависимость директора от глобальных координат известна, небольшой модификации модуля `NormalSolver` может быть достаточно для получения как точного приближения директора, так и возможности параллельного запуска решателя оболочки.

8.4 Комбинированный анализ с сечениями балок

Если сетка содержит также одномерные элементы, эти элементы меньшей размерности можно использовать для определения дополнительных ребер жесткости, рассматривая их как упругие балки. Объединенная модель может быть собрана в случае как линейного, так и нелинейного анализа, но деформация сечений балки всегда вычисляется в соответствии с линейной теорией, как описано в главе Модель 10 настоящего руководства.

Параметры модели балки названы так, как описано в главе Модель 10, а их значения считываются из сечений материала, поэтому поэлементно организованные данные пока не могут быть даны. В частности, одно из главных направлений поперечного сечения балки (ось y_3) может быть задано путем указания значения ключевого слова Director.

Модель оболочки изначально не распознает момент вокруг директора оболочки (нормали) срединной поверхности, в то время как используемая формулировка балки использует полный результирующий вектор пары (момента) с тремя компонентами. Чтобы справиться с этим несоответствием, матрица жесткости балки обрабатывается перед сборкой в глобальную матрицу жесткости таким образом, что результирующий вектор пары не может иметь компонент относительно вектора директора балки. Директора балки и оболочки теперь определяются независимо, но естественно построить объединенную модель так, чтобы директора оболочки и балки согласовывались в местах, где пересекаются области двух моделей.

8.5 Формулировка с буровыми степенями свободы

Если срединная поверхность оболочки не является гладкой, моделирование нормальной деформации с помощью уравнения

$$y_{33}(U) = \beta \cdot a_3$$

не является простым, поскольку директор не может быть определен однозначно в соединении, где возникает неоднозначность. В этом случае для обработки разрыва понадобятся дополнительные уравнения ограничений. Похоже, что альтернативная формулировка, основанная на использовании степеней свободы бурения, имеет относительное преимущество в том, что такие проблемы можно решать проще, не вводя новые уравнения ограничений.

Выражение энергии для формулировки со степенями свободы сверления аналогично (8.26), но теперь второй член в правой части (8.26) заменен на

$$\frac{\xi D E d}{+v} \frac{1}{K} \theta_3 - \frac{1}{2} v_2 + 2 \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} D K^2 \quad (8.28)$$

так что шестое неизвестное θ_3 может быть связано с условием баланса углового момента [3], где ξD — регулируемый параметр. Отмечено, что в этой формулировке приближение смещения сводится к традиционной форме

$$u^* = v - y_3 a_3 \times \theta \quad (8.29)$$

с использованием упрощенной обработки поперечных деформаций. Формулировка с буровыми степенями свободы была реализована только в случае линейной теории оболочек.

8.6 Ключевые слова

Моделирование

Система координат [Строка Декартова 3D](#)

Систему координат следует выбирать трехмерной, хотя базисные функции для вычислений соответствуют двумерным конечным элементам.

Материал [коврика ID](#)

Следующие ключевые слова относятся к указанию толщины оболочки и параметров материала.

Толщина оболочки [реальная](#)

Толщина оболочки d указывается с помощью этого ключевого слова.

Коэффициент Пуассона *Реальный*

Коэффициент Пуассона определяется с помощью этого ключевого слова.

Действительный модуль Юнга

Это ключевое слово определяет значение модуля Юнга.

Плотность *Real* **Это**

ключевое слово используется для определения плотности материала.

Действительный коэффициент демпфирования Рэля (Raleigh)

Damping Alpha) Указывает коэффициент для активации демпфирования, пропорционального массе.

Решатель *решателя идентификатор***Строка уравнения**

Описывающее имя решателя.

Файл процедуры "ShellSolver" "ShellSolver"

Имя подпрограммы решателя.

Переменное отклонение струны[U:3 DNU:3]

Имя переменной решателя может быть выбрано свободно (но оно должно использоваться последовательно в других местах). Переменная по умолчанию — Deflection[U:3 DNU:3], которая, таким образом, подходит для модели, полученной при ограничении (8.13). Затем первые три компонента переменной решателя (0) (имя переменной по умолчанию U), в поверхности v (1) (имя переменной по умолчанию то время как остальные определяют поле смещения срединной связанный с вектором v DNU). Переменные всегда соответствуют ортогональным декартовым компонентам относительно глобальной системы координат.

Переменные DOF *Целое число*

Значение этого параметра может быть равно 6 или 9. Значение 9 можно использовать только при применении р-элементов. По умолчанию задано значение 6.

Поворот степеней свободы

Логический. Если используется шестикомпонентная модель, это ключевое слово можно задать для использования декартовых компонентов векторного поля θ в качестве переменных модели.

Бурение DOF *Логическое*

В случае линейной теории оболочек это можно использовать для активации формулировки со степенями свободы бурения, описанной в разделе 8.5.

Большое отклонение *Логика*

По умолчанию решаются нелинейные уравнения. При значении False используется линеаризованный тензор деформации.

Логический анализ собственных значений

Анализ собственных значений на основе линеаризованной модели может быть выполнен, если этому ключевому слову присвоено значение True.

Смещение сетки *логическое*

Если этому ключевому слову присвоено значение True, сетка отображается для представления деформированной конфигурации. Формулировка полного лагранжева типа тем не менее используется, поэтому задача оболочки ставится над недеформированной конфигурацией. В случае анализа собственных значений это ключевое слово не поддерживается.

Нелинейная система *Сходимость Допуск Действительный*

Отношение 2-нормы нелинейной системной невязки к 2-норме начального правого вектора всегда используется в качестве критерия остановки для нелинейной итерации. Это ключевое слово определяет допуск остановки для итерации Ньютона для решения нелинейной системы.

Допуск сходимости линейной системы *Действительный* **Следует отметить,**

что каждая линеаризованная задача, решенная в ходе нелинейной итерации, дает приращение $\delta U_{k+1} = U_{k+1} - U_k$ к предыдущей итерации. Поэтому, за исключением случая решения линейной модели оболочки (Большое отклонение = Ложь), для линейных систем часто может использоваться довольно мягкий допуск остановки, не влияя на ход нелинейной итерации.

Логическая репараметризация сетки

Если задано значение `True`, решатель не применяет внутреннюю реконструкцию поверхности, которая зависит от заданных данных директора, но ожидает узловую сетку третьего порядка физической срединной поверхности. В этом случае вся геометрическая информация выводится непосредственно из сетки, поэтому не требуется никакой пользовательской информации о директоре оболочки. В настоящий момент никакие числовые приемы не применяются для обработки численной избыточной жесткости (блокировки), но базовое приближение третьего порядка может дать разумные результаты, если оболочка не очень тонкая.

Пропустить реконструкцию поверхности *Логический* **Если**

задано значение `True`, решение некоторых особых случаев может быть выполнено таким образом, что математическая формулировка будет дана над двумерной (плоской) опорной областью, которая используется для задания глобальной параметризации срединной поверхности линиями координат кривизны. В этом случае аппроксимация должна быть выполнена с использованием p -элементов.

Оператор снижения деформации *Целое число*

Это ключевое слово определяет выбор операторов снижения деформации. Если это ключевое слово не указано, решатель переключается на метод, который, как было установлено, дает наилучшие результаты для контрольных случаев, рассмотренных в ходе разработки.

Параметр стабилизации бурения *Real* **Это** ключевое слово может

использоваться для определения значения ξD для формулировки со степенями свободы бурения.

Body Force *bf* идентификатор**Нормальное давление** *Реальное*

Значение этого ключевого слова должно давать сумму нормальных тяг, приложенных к верхней и нижней граням оболочки при $y = \pm d$. Если ³ модель оболочки нелинейна, это нормальная поверхностная сила на единицу площади деформированной поверхности. В этом случае нормаль к деформированной срединной поверхности и площадь вычисляются с использованием предыдущей итерации.

Граничное условие *bc id* (0) и *v* (1)

Условия Дирихле для компонентов v могут быть заданы стандартным образом. Кроме того, результирующий вектор силы N и результирующий вектор пары M могут быть заданы для получения механической нагрузки на кривой c , которая лежит на срединной поверхности в своей опорной конфигурации и может быть представлена как $c = f(I)$, с $I \in R$. Это приводит к вкладу

$$\int_{\Gamma} N(f(s)) \cdot v(0) \chi(f(s)) \, dc(f(s)) + \int_{\Gamma} M(f(c)) \cdot v(1) \chi(f(c)) \, dc(f(c))$$

к линейному функционалу задачи оболочки. Обратите внимание, что по умолчанию компоненты всех векторов данных определяются относительно глобальной системы координат.

U i *Real*

Если используется имя переменной по умолчанию, то при $i=1,2,3$ можно задать ВС Дирихле для компонентов (0) смещения срединной поверхности v .

ДНУ и *Real*

Если используется имя переменной по умолчанию, то при $i=1,2,3$ БК Дирихле для компонентов

⁽¹⁾ может быть дано. v

Равнодействующая сила i *действительная*

Это ключевое слово можно использовать для задания компонентов результирующей силы N , измеренной на единицу длины кривой c на срединной поверхности.

Результирующая пара i *Real*

Это ключевое слово можно использовать для задания компонентов результирующей пары M , измеренных на единицу длины кривой c на срединной поверхности.

Dead Loads *Logical* По умолчанию

задание постоянных значений для N или M создает «dead loads», ориентация которых фиксирована относительно глобальной системы координат. Задание значения `False` для этого ключевого слова изменяет значение результирующей силы и парных нагрузок таким образом, что их ориентация следует за деформацией линий кривизны, при этом направление первого компонента следует за деформацией координатной кривой, соответствующей наименьшей кривизне в недеформированной конфигурации. Тогда Resultant Force 3 обычно дает краевую нагрузку в направлении нормали к деформированной средней поверхности.

Spring i *Real* При $i=1,2,3$

это ключевое слово может быть использовано для создания результирующей силы, которая пропорциональна смещению вдоль направления координаты i . При $i=4,5,6$ можно сгенерировать глобальной системы координат. пара, которая пропорциональна (результативной) относительно

Масса и *Real*

Это ключевое слово с $i=1,2,...,6$ может использоваться для сборки дополнительной массы или момента инерции. Первые три компонента связаны с трансляционными степенями свободы, в то время как остальные компоненты связаны с степенями свободы, которые определяют $v(1)$; см. соглашение об индексации, используемое в связи с Spring i .

Библиография

- [1] Д. Шапель и К. Дж. Бате. Конечно-элементный анализ оболочек. Основы. Springer, вторая часть. издание, 2011.
- [2] PG Ciarlet, Введение в дифференциальную геометрию с приложениями к теории упругости, Springer, Дордрехт, Нидерланды, 2005.
- [3] М. Юра и С. Н. Атлури. Формулировка мембранного конечного элемента со степенями свободы сверления. Вычислительная механика, 9(6):417–428, 1992.
- [4] PM Naghdi. Основы теории упругих оболочек. In Progress in Solid Mechanics, т. 4 (редакторы IN Sneddon, R. Hill) North-Holland, страницы 1–90, 1963.

Модель 9

Уравнения линейной упругости пластины

Имя модуля: Smitc

Подпрограммы модуля: SmitcSolver

Авторы модуля: Микко Лили, Яни Паавилайнен

Авторы документа: Микко Лили, Питер Рабак

9.1 Введение

Линейные упругие пластинчатые элементы Элмера основаны на модели сдвиговой деформации Рейсснера и Миндлина. Дискретизация конечных элементов выполняется с использованием так называемых стабилизированных пластинчатых элементов MITC, которые свободны от числовой блокировки.

9.1.1 Модель Рейсснера-Миндлина

Смещение $u = (u_x, u_y, u_z)$ пластины Рейсснера-Миндлина (тонкого или умеренно толстого линейно-упругого тела, которое в своей недеформированной исходной конфигурации занимает трехмерную область $\Omega \times (-t, t)$, где Ω — срединная поверхность, а t — толщина) получается из кинематических уравнений

$$u_x(x, y, z) = \theta_x(x, y) \cdot z \quad (9.1)$$

$$u_y(x, y, z) = \theta_y(x, y) \cdot z \quad (9.2)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (9.3)$$

где θ_x и θ_y — компоненты вектора вращения $\theta = (\theta_x, \theta_y)$, а w — поперечное отклонение срединной поверхности, см. рисунок 1.

Функции w и $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ определяются из условия, что они минимизируют полный потенциал энергии

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \kappa : m \, d\Omega + \int_{\Omega} c \cdot q \, d\Omega - \int_{\Omega} p w \, d\Omega \quad (9.4)$$

где p — поперечная нагрузка давления, $\kappa = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\theta}} + \underline{\underline{\theta}}^T)$ — кривизна срединной поверхности, $\gamma = \underline{\underline{w}} - \underline{\underline{\theta}}$ — поперечная деформация сдвига, $m = E : \kappa$ — изгибающий момент, а $q = G \cdot \gamma$ — вектор поперечной силы сдвига. Тензор четвертого порядка E и тензор второго порядка G определяют изгибную и сдвиговую жесткости поперечного сечения соответственно. Для линейно-упругих материалов имеем $G \cdot \gamma = G \gamma$ и

$$E : \kappa = K[\kappa + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{tr} \kappa) \mathbb{I}] \quad (9.5)$$

где $K = Et^3/[12(1-\nu^2)]$ — жесткость при изгибе, E — модуль Юнга, G — модуль сдвига, а ν Коэффициент Пуассона. Конструкция тензоров E и G для ортотропных и перфорированных материалов обсуждается в разделе 9.3.

Минимизатор энергии удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (m_{ij} + q) = 0 \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} q = p \quad (9.7)$$

9.1.2 Поверхностное натяжение

При наличии поверхностного натяжения к энергии добавляется следующий член:

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} w \cdot T \cdot w \, d\Omega \quad (9.8)$$

где T — тензор второго порядка, представляющий заданную нормальную силу (обычно $T = T I$, где T — константа).

Уравнение равновесия (9.7) тогда переписывается как

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (q + T \cdot w) = p \quad (9.9)$$

9.1.3 Граничные условия

В модели пластины Рейсснера-Миндлина можно применить следующие граничные условия:

- Мягкий фиксированный край: $w = 0$ и $\theta \cdot n = 0$
- Жесткий фиксированный край: $w = 0$ и $\theta = 0$
- Мягкий просто опертый край: $w = 0$
- Жесткий просто опертый край: $w = 0$ и $\theta \cdot t = 0$
- Свободный край: $m \cdot n = 0$ и $(q + T \cdot w) \cdot n = 0$

Граничные условия, конечно, могут быть также неоднородными. Для фиксированных и просто опирающихся краев заданные значения w , $\theta \cdot n$ и $\theta \cdot t$ учитываются на матричном уровне после дискретизации конечных элементов. На свободной части края неоднородный случай рассматривается путем добавления следующих членов в энергию:

$$\int_{\Gamma_{\text{свободный}}} q n w \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{свободно}}} m n \cdot \theta \, d\Gamma \quad (9.10)$$

где $q n = q \cdot n$ и $m n \equiv m \cdot n$ — заданные функции.

9.1.4 Пластины Кирхгофа Когда

толщина пластины мала ($t \ll \text{diam}(\Omega)$), модель Рейсснера-Миндлина можно рассматривать как штрафное приближение классической модели пластины Кирхгофа. Модель Кирхгофа получается из (9.1)-(9.9) путем применения ограничения $\gamma = 0$.

Управляющие уравнения затем сводятся к

$$K \quad w \quad T \quad w = p \quad (9.11)$$

9.1.5 Анализ переходных и естественных режимов

Переходная модель пластины получается путем добавления инерционного члена $\rho t w''$ в левую часть (9.7), (9.9) и (9.11). Здесь ρ — плотность материала. Затем собственные частоты колебаний и формы мод получаются путем принятия $p = 0$ и решения уравнений преобразования Фурье.

9.2 Реализация метода конечных элементов

Прямая минимизация (9.4) с использованием стандартного метода конечных элементов Галеркина не удаётся из-за хорошо известных явлений численной блокировки (метод не может справиться с ограничением Кирхгофа $\gamma = 0$, которое становится действительным при малых t). Чтобы избежать блокировки, Элмер использует так называемые элементы SMITC (стабилизация и смешанная интерполяция тензорных компонентов), которые, как известно, оптимально сходятся и хорошо работают при любых условиях [4].

Линейный элемент семейства SMITC был впервые введен Бреucci, Фортином и Стенбергом в [2]. Метод определяется путем замены члена энергии сдвига в (9.4) следующей числовой модификацией:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} : \mathbf{h} \mathbf{h}^T d\Omega \quad (9.12)$$

где $\mathbf{h}$ называется приведенной деформацией сдвига (иногда ее также называют предполагаемым или заменяющим сдвигом) и $\mathbf{q} = (\tau^2 + \alpha h^2) \mathbf{1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}$ приведенная сила сдвига. Здесь h — размер ячейки (диаметр наибольшей ячейки элемент), а $\alpha > 0$ — числовой параметр стабилизации (обычно $\alpha = 0,15$).

Приведенный сдвиг $\mathbf{h}$ определяется поэлементно таким образом, что h

$$h_K = (a_K - b_K y, a_K + c_K x) \mathbf{y}^T \mathbf{h}_K \quad (9.13)$$

для любого элемента K . Параметры a_K , b_K и c_K определяются из условий

$$(c_K - c_{\text{ср}}) \cdot \mathbf{t}_E = 0 \quad (9.14)$$

для каждого ребра E из K . Здесь $\mathbf{t}_E$ — касательная к E против часовой стрелки.

Было показано [3], что линейный элемент SMITC эквивалентен элементу T3BL (Triangle, 3 nodes, Linked Interpolation) Сюй, Ауриккио и Тейлора [8, 1], анизопараметрически интерполированному элементу MIN3 Тесслера и Хьюза [7] и элементу TRIA3 Макнила [5]. Мы ссылаемся на [3] для более подробного обсуждения.

9.3 Параметры упругости перфорированных пластин

В микроэлектромеханических системах пластинчатые структуры часто перфорируются для уменьшения эффекта демпфирования сжатой пленки. Это также влияет на уравнение упругости. Если отверстий так много, что их невозможно рассматривать по отдельности, их влияние может быть гомогенизировано по всей структуре. На практике это означает, что исходные упругие параметры заменяются эффективными параметрами, которые учитывают отверстия. Этот метод был описан Педерсеном и др. [6] и внедрен в решатель Яни Паавилайненем.

В гомогенизации эффективные параметры для ортотропной пластины определяются таким образом, чтобы неперфорированная модель приближалась к перфорированной пластине. Основная идея заключается в том, чтобы установить аналитические выражения энергий деформации перфорированной и неперфорированной пластин равными. Этот метод по своей сути ограничен простыми геометриями, где аналитические выражения могут быть найдены. До сих пор в решателе были реализованы только квадратные отверстия.

Элементарная ячейка перфорированной пластины может быть принята состоящей из одной небольшой квадратной пластины со стороной $b = 2a$ и четырех балок длиной a , как показано на рисунке 9.1. Используя приближенные формулы, получена аналитическая формула для энергии деформации перфорированной пластины. Она должна быть равна энергии деформации неперфорированной ортотропной мембраны. Из этого условия мы получаем набор уравнений, из которых можно решить эффективные параметры.

Тензор упругости имеет три независимых компонента: $C_{11} = C_{22}$, $C_{12} = C_{21}$ и C_{44} . Выражение для этого есть [6],

$$C_{11} = C_{22} = b^2 \frac{1}{vE(b^2 - a^2)} + \frac{a(b^2 - a^2)}{2(1 - \nu)} \quad (9.15)$$

$$C_{12} = C_{21} = b^2 \frac{2a}{v^2} \quad (9.16)$$

$$C_{44} = \frac{1}{46} \frac{1}{2(1 + \nu)} - 2a + bh^3 \frac{12Ka(b - 2a)26(b - 2a)}{b^2} \quad (9.17)$$

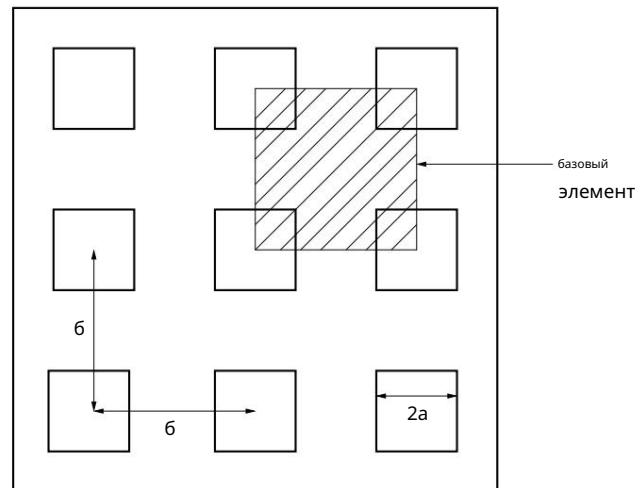


Рисунок 9.1: Основной элемент перфорированной пластины, состоящий из пяти прямоугольных балок

где K — константа¹, определяется как

$$K = \begin{cases} \frac{1}{3} & 1 - 0,63 \frac{b-2a}{b} \quad (b-2a) \geq 3h, \text{ jos } h > b-2a \\ \frac{1}{3} & \text{чч } 1 - 0,63 \frac{b-2a}{b} \quad (b-2a) < 3h, \text{ jos } h < b-2a. \end{cases} \quad (9.18)$$

Напряжение в средней плоскости перфорированной пластины можно уменьшить до боковых напряжений ортотропной пластины путем простого масштабирования:

$$T = (1 - 4a^2/b^2) T_0, \quad (9.19)$$

где T_0 — натяжение перфорированной пластины. Используя это уменьшенное натяжение и измененные материальные параметры уравнений (9.15), (9.16) и (9.17), ортотропная пластина имитирует поведение перфорированной пластины при рассмотрении макроскопических величин. Однако эта модель не подходит для аппроксимации максимальных напряжений вокруг отверстий, например.

9.4 Ключевые слова

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения SmitcSolver

Файл процедуры "Smitc" "SmitcSolver"

Процедура, включающая линейную модель пластины.

Переменные отклонения струны

Это может быть любое название, если оно последовательно используется в других местах.

Переменные DOF Целое число 3

Степени свободы для прогиба. Первая степень — это смещение, а две последующие — его производные в направлении координатной оси.

Логический анализ собственных значений

Также могут быть вычислены собственные значения и собственные моды уравнения упругости. Это делается автоматически путем вызова решателя собственных значений после решения исходного уравнения. Значение по умолчанию — False.

¹ В статье [6] допущена ошибка в определении K . В статье есть выражение $(b-2a)/h^3$, которое делает K разрывным при $h = b-2a$.

Собственные системные значения Целое число

Если собственные значения вычисляются, это ключевое слово выдает количество собственных мод, которые необходимо вычислить. Всегда находятся наименьшие собственные значения.

Логическая коррекция отверстий

Если пластина перфорирована, отверстия могут быть учтены гомогенизированной моделью. Это активируется этим ключевым словом. Значение по умолчанию — False.

Материал коврика ID**Плотность Реальная**

плотность пластины.

Коэффициент Пуассона Реальный**Действительный модуль Юнга**

Параметры упругости задаются ключевыми словами «модуль Юнга» и «коэффициент Пуассона».

Толщина реальная

Толщина пластины.

Напряжение Реальное

Плита может быть предварительно напряжена.

Реальный размер отверстия**Дробь отверстия Действительная**

Если Hole Correction имеет значение True, решатель пытается найти размер и относительную долю отверстий. Если они присутствуют, отверстие считается квадратным.

Граничное условие bc id**Отклонение i Real**

Дирихле BC для компонент прогиба, $i=1,2,3$.

Body Force bf идентификатор**Давление Реальное**

Возможность для объемных сил. Для связанных систем существует возможность иметь до трех сил. Два других затем маркируются как Pressure B и Pressure C.

Пружина

действительная Локальная пружина, которая при умножении на смещение приводит к возникновению локальной силы.

Демпфирование

реальное Локальное демпфирование, которое приводит к локальной силе при умножении на скорость смещения.

Пружина и демпфирование также могут быть определены как параметры материала.

Библиография

- [1] Ф. Ауриккио и Р. Л. Тейлор. Треугольный толстый пластинчатый конечный элемент с точным тонким пределом. Конечные элементы в анализе и проектировании, 19:57–68, 1995.
- [2] М. Фортин, Ф. Брецци и Р. Стенберг. Анализ ошибок смешанно-интерполированных элементов для Рейсснера-Миндлина Пластины. Математические модели и методы в прикладных науках, 1:125–151, 1991.
- [3] М. Лили. О связи между некоторыми линейными треугольными пластинчатыми изгибающимися элементами Рейсснера-Миндлина. Численная математика, 85:77–107, 2000.
- [4] М. Лили и Р. Стенберг. Стабилизированные элементы изгиба пластины mitc. В Advances in Finite Element Techniques (ред. М. Пападракис и BNV Topping) Civil Comp Press., стр. 11–16, 1994.
- [5] Р. Х. Макнил, «Вывод матриц жесткости элементов с помощью предполагаемого распределения деформаций», Nucl. Engrg. Дизайн, 70:3–12, 1982.

-
- [6] М. Педерсен, В. Олтуис и П. Бергвельд. О механическом поведении тонких перфорированных пластин и их применение в кремниевых конденсаторных микрофонах. Датчики и приводы, А 54:6.
- [7] А. Тесслер и Т. Дж. Р. Хьюз. Трехузловой элемент пластины Миндлина с улучшенным поперечным сдвигом. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 50:71–101, 1985.
- [8] Z. Xu. Толсто-тонкий треугольный пластинчатый элемент. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 33:963–973, 1992.

Модель 10

Одномерные уравнения для упругости Балки

Имя модуля: BeamSolver3D

Подпрограммы модуля: TimoshenkoSolver

Авторы модуля: Мика Малинен

Авторы документа: Мика Малинен

10.1 Введение

Решатель, описанный в этом разделе, может быть использован для решения уравнений структурной балки. Уравнения равновесия выражаются в терминах результирующих напряжений N и M , которые представляют силы и моменты, испытываемые поперечным сечением балки. Если поперечное сечение рассматривается как ориентированная поверхность с положительной единичной нормалью e_1 , результирующая напряжений N определяется как

$$N = \int_A \sigma e_1 dA \quad (10.1)$$

где σ — тензор напряжений, а A обозначает поперечное сечение балки. Обычно N разлагается на компоненты относительно ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$, связанного с локальной системой координат, которая имеет начало на пересечении поперечного сечения и оси балки. Координаты точек относительно этой системы обозначены как (y_1, y_2, y_3) , причем ось y_1 совмещена с осью балки, а две другие оси предполагаются совпадающими с главными направлениями поперечного сечения. Результирующее напряжение $M = M_1 e_1 + M_2 e_2 + M_3 e_3$ имеет в качестве своих компонентов изгибающие моменты

$$M_2 = \int_A y_3 (\sigma e_1) \cdot e_1 dA, \quad M_3 = \int_A y_2 (\sigma e_1) \cdot e_1 dA, \quad (10.2)$$

в то время как M_1 — крутящий момент. Отметим, что в общем случае точное моделирование кручения — непростая задача, и здесь будет использовано лишь элементарное приближение.

10.2 Основные уравнения

Предположим, что ось балки описывается с помощью параметризации длины дуги $s \in [0, L]$ $r(s) \in E^3$. Уравнения равновесия тогда задаются как

$$\begin{aligned} N(c) &= F(c), \\ M(c) - t(c) \times N(c) &= G(c), \end{aligned} \quad (10.3)$$

где F и G — плотности приложенных сил и моментов на единицу длины, а $t(s)$ — касательная к оси балки. Следует отметить, что F и G можно рассматривать как включающие инерционные силы тела, чтобы получить уравнения для переходных случаев.

В случае трактовки сдвиговой деформации Тимошенко подходящие обобщенные меры деформации могут быть выражены как

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= u'(s) - \theta(s) \times t(s), \quad \kappa(s) \\ &= \theta'(s) \end{aligned} \quad (10.4)$$

где $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ так $\theta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — смещение оси балки и компоненты θ называются вращениями. Отмечено, что базовое приближение смещения u^D для общей точки $r(s) = y_2 e_2(s) + y_3 e_3(s)$ поперечных сечений задается покомпонентно как

$$\begin{aligned} u^D(s; y_2, y_3) \cdot e_1(s) &= u_1(s) - y_2 \theta_3(s) + y_3 \theta_2(s), \\ u^D(s; y_2, y_3) \cdot e_2(s) &= u_2(s) - y_3 \theta_1(s), \\ u^D(s; y_2, y_3) \cdot e_3(s) &= u_3(s) + y_2 \theta_1(s). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Учредительные соотношения записываются как

$$\begin{aligned} H &= D, \\ M &= E \kappa, \end{aligned} \quad (10.6)$$

где

$$D = \text{diag}(EA, GA_{k2}, GA_{k3}) \quad (10.7)$$

и

$$E = \text{diag}(GJ, EI_2, EI_3). \quad (10.8)$$

Здесь E и G — модуль Юнга и модуль сдвига соответственно, а J и I_k — крутильная постоянная и вторые моменты площади соответственно. Параметры k_j известны как поправка на сдвиг факторы.

10.3 Слабая формулировка

Слабая формулировка задачи о балке вытекает из тождеств

$$\begin{aligned} \int_0^L H \cdot v \, ds &= \int_0^L \Phi \cdot v \, ds, \\ \int_0^L M \cdot \psi \, ds &= \int_0^L t \times N \cdot \psi \, ds = \int_0^L G \cdot \psi \, ds \end{aligned} \quad (10.9)$$

которые дают после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_0^L H \cdot v \, ds &= \int_0^L F \cdot v \, ds + N(L) \cdot v(L) - N(0) \cdot v(0), \\ \int_0^L M \cdot \psi \, ds &= \int_0^L t \times N \cdot \psi \, ds = \int_0^L G \cdot \psi \, ds + M(L) \cdot \psi(L) - M(0) \cdot \psi(0). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Для того чтобы задать силы, действующие на балку со стороны окружающей среды, положим

$$N_0 = N(0) \text{ и } N_L = N(L). \quad (10.11)$$

Аналогично изгибающие моменты, приложенные к балке, определяются как

$$M_0 = M(0) \text{ и } M_L = M(L). \quad (10.12)$$

Используя (10.4) и (10.6) и включая члены переходной инерции, уравнения (10.10) приводят к Стандартная абстракция задачи: найти $w(u(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$ и такое, что

$$a(w, z) = l(z), \quad z = (v, \psi) \in V \quad (10.13)$$

C

$$a(\omega, r) = \int_0^L \mathbf{m} \mathbf{y}'' \cdot \mathbf{B} \, d\zeta + \int_0^L \operatorname{Im} \theta'' \cdot \psi \, ds + \int_0^L \mathbf{E} \theta \cdot \psi \, ds + \int_0^L D(\mathbf{u} - \theta \times \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{v} - \psi \times \mathbf{t}) \, ds \quad (10.14)$$

И

$$\lambda(z) = \int_0^L \Phi \cdot \mathbf{B} \, dz + \int_0^L G \cdot \psi \, ds + N_L \cdot v(L) + N_0 \cdot v(0) + M_L \cdot \psi(L) + M_0 \cdot \psi(0). \quad (10.15)$$

Здесь m — масса на единицу длины, а диагональ $I m$ задает (массовые) моменты инерции. Кроме того, U и V обозначают множества кинематически допустимых функций и тестовых функций соответственно.

10.4 Ключевые слова

Моделирование

Система координат Строковая декартова 3D Систему координат следует выбирать трехмерную, так как не предполагается определенная ориентация оси балки.

Материал коврика ID

Следующие ключевые слова относятся к указанию параметров материала и данных поперечного сечения.

Действительный модуль Юнга

Это ключевое слово определяет значение модуля Юнга E .

Модуль сдвига реальный

Это ключевое слово определяет значение G.

Density Real Это

ключевое слово используется для определения плотности материала. Плотность необходима в переходных случаях для включения эффектов инерционных сил.

Площадь поперечного сечения действительная

Это ключевое слово определяет площадь A поперечного сечения.

Основное направление 2(3) Реальное

Три компонента, заданные с помощью этого ключевого слова, должны определять направление локальной оси y_2 , чтобы можно было вычислить вектор e_2 . Это направление должно быть ортогональным оси балки, которая определяется координатами узлов элемента. Если это ключевое слово не указано, предполагается, что любая ориентация будет подходящей, если предположить, что параметры поперечного сечения не зависят от ориентации осей координат.

Постоянная кручения Действительная

Чтобы получить приближенное значение крутильных эффектов, можно задать значение параметра JT.

Второй момент области 2 Реальный

Это ключевое слово должно дать значение интеграла I_2 чтобы и $\frac{2}{3}$ и.

Второй момент области 3 Реальный

Это ключевое слово должно дать значение интеграла I_3 $\frac{2}{2}$ и.

Релеевское затухание Альфа Действительный

Это определяет параметр для активации пропорционального массе демпфирования для поступательных степеней свободы.

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения

Описывающее имя решателя.

Файл процедуры "BeamSolver3D" "TimoshenkoSolver"

Имя подпрограммы решателя.

Переменное отклонение струны[U:3 Theta:3]

Имя переменной решателя можно выбирать свободно (но оно должно использоваться последовательно в других местах).

Переменные DOF Целое число 6

Нет необходимости использовать это ключевое слово, так как единственное возможное значение — 6, и оно автоматически задается решателем. Первые три компонента переменной решателя определяют смещение u оси балки (имя переменной по умолчанию U), а остальные задают вектор θ (имя переменной по умолчанию Θ). При этом компоненты обоих векторов определяются относительно глобальной системы координат.

Body Force bf идентификатор

Body Force k Real Значение

этого ключевого слова задает k -й компонент приложенной силы F относительно глобальной системы координат.

Граничное условие bc id

Условия Дирихле для компонент u и θ можно задать стандартным образом. Отметим, что здесь компоненты обоих векторов определены относительно глобальной системы координат.

U_i Real

Если используется имя переменной по умолчанию, то при $i=1,2,3$ можно задать уравнения Дирихле для компонентов смещения u .

Тета i Real

Если используется имя переменной по умолчанию, то при $i=1,2,3$ можно задать ВС Дирихле для компонентов поворота θ .

U_i Load Real В случае

имени переменной по умолчанию это создает точечную силу, приложенную в направлении i -го базисного вектора глобальной системы координат.

Тета i Load Real

В случае имени переменной по умолчанию это создает моментную нагрузку относительно направления i -го базисного вектора глобальной системы координат.

Модель 11

Добавление точечных пружин и масс

Имя модуля: SpringAssembly

Подпрограммы модуля: SpringAssembler

Авторы модуля: Мика Малинен

Авторы документа: Мика Малинен

11.1 Введение

Утилита, описанная в этом разделе, может использоваться для добавления пружин и масс, заданных по узлам, в структурные модели. Эта утилита является универсальной и должна применяться к нескольким структурным моделям, включая уравнения линейной и нелинейной упругости, оболочки, пластины и балки. Следует отметить, что некоторые модели могут быть определены как имеющие точечные пружины или массы без использования этой утилиты, при условии, что набор граничных элементов включает точечные элементы, а сама модель может обрабатывать пружины или массы. Однако рассматриваемая здесь утилита не зависит от содержимого файла сетки, определяющего граничные элементы, поскольку теперь предполагается, что места пружин и масс указаны в терминах индексов узлов сетки.

11.2 Руководство по процедуре сборки

Рассматриваемая подпрограмма модуля может быть вызвана как дополнительная процедура сборки для изменения матриц жесткости и массы целевой модели, которая изменяется для получения пружин или масс. Для этого во входном файле решателя раздел решателя, связанный с первичной моделью, должен содержать ключевое слово `command Assembly Solvers` (документацию этой универсальной служебной команды см. также в ElmerSolver Manual). Значение этого ключевого слова дает целочисленный идентификатор раздела решателя, который используется для выполнения дополнительной процедуры сборки.

Чтобы описать, что необходимо, предположим, что первичный решатель, который должен использовать определения пружин, связан с именем переменной "Смещение". Если затем добавить раздел решателя X в файл входных данных решателя как

Решатель X

Уравнение = «Собрать пружины»

Exec Solver = Никогда

Процедура = "SpringAssembly" "SpringAssembler"

Имя переменной смещения = «Смещение»

Конец

и добавляет в раздел решателя основного решателя строку

Решатели сборки(1) = X

тогда должно быть возможно использовать разделы граничных условий для добавления характеристик пружины, как

Граничное условие Y

Целевые узлы(...) = Пружина ...

1 = Пружина 2 ...

= Пружина 3 = ...

...

...

Конец

Дополнительную массу (и момент инерции, если применимо) можно добавить аналогичным образом, используя ключевое слово `Mass i`, где `i` — целочисленная строка.

11.3 Ключевые слова

Идентификатор решателя

Имя переменной смещения `Строка`

Значение этого ключевого слова должно быть именем переменной решателя, которая изменяется для добавления дополнительных пружин или масс. Значение по умолчанию — «Смещение».

Граничное условие `bc id`

`Spring i Real` Это

ключевое слово может использоваться для создания реакции, пропорциональной значению `i`-й глобальной степени свободы (DOF) конечного элемента, используемого для дискретизации первичной модели.

`Масса и Реал`

С помощью этого ключевого слова матрица масс модели может быть изменена путем сборки дополнительной диагональной матрицы масс. Целочисленная строка `i` ключевого слова относится к `i`-й глобальной степени свободы (DOF) элемента. В базовой 3D-симуляции значения для всех `i` {1, 2, 3} должны быть одинаковыми по физическим причинам, поскольку они исходят из одного и того же скалярного свойства. При `i` 3 дополнительный момент инерции может быть задан для моделей, для которых он имеет смысл (например, для модели оболочки).

Часть 3

Модели акустики

Модель 12

Модель Гельмгольца

Название модуля: HelmholtzSolve

Подпрограммы модуля: HelmholtzSolver

Авторы модуля: Юха Руоколайнен, Микко Лили, Мика Малинен, Петер Рабак

Авторы документа: Юха Руоколайнен, Петер Рабак

12.1 Введение

Этот модуль решает уравнение Гельмгольца, которое является преобразованием Фурье волнового уравнения. В дополнение к основному уравнению решатель может учитывать переменную плотность, фоновое поле конвекции, простое затухание и специальные граничные условия для взаимодействия с другими решателями гармонических по времени.

12.2 Теория

Например, распространение звука в воздухе достаточно хорошо описывается волновым уравнением

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0, \quad \text{где } c \text{ — скорость звука.} \quad (12.1)$$

При линейности уравнение можно записать в частотном пространстве, чтобы получить уравнение Гельмгольца

$$k^2 P - \Delta P = 0, \quad (12.2)$$

где $k = \omega/c$ дает волновое число в терминах угловой частоты ω . Мгновенное давление затем может быть вычислено из комплекснозначного поля P как

$$p(t) = (P e^{i\omega t}) = (P \cos(\omega t) - (P \sin(\omega t)), \quad (12.3)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

В уравнении Элмера есть добавленный член, который пропорционален первой производной поля по времени, после чего уравнение становится

$$(k^2 - i\omega D)P - \Delta P = 0, \quad (12.4)$$

где D — коэффициент затухания. Для построения специальных предобуславливателей для итеративных линейных решателей в предобуславливании может использоваться дискретизация исходной задачи Гельмгольца со сложным сдвигом. Если рассмотреть случай $D = 0$, то смещенное уравнение задается как

$$k^2 (1 - \eta)P - \Delta P = 0, \quad (12.5)$$

где η — комплекснозначный параметр сдвига. Обычно η считается мнимым, т.е. действительная часть η тогда равна нулю. Такой подход мотивирован тем, что смещенную задачу проще решить итеративно, когда η достаточно велико.

12.2.1 Граничные условия

Обычным граничным условием для уравнения Гельмгольца является задание потока на границе:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = g. \quad (12.6)$$

Также могут быть заданы граничные условия Дирихле. Граничное условие Зоммерфельда или дальнего поля записывается как

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} + \frac{i\omega}{c} P = 0, \quad (12.7)$$

где комплексная величина Z может быть определена пользователем. Отмечено, что входящие и исходящие волны могут быть аппроксимированы путем установки $Z = c$ и $Z = -c$ соответственно.

Особый вид состояния потока выражается в терминах заданного поля скорости, которое является гармоническим по времени решение уравнения потока или структуры. Когда задано поле скорости $\mathbf{v}$, то поток получается из

$$\mathbf{g} = -i\omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad (12.8)$$

где ρ — плотность жидкости. Если вместо этого задано гармоническое по времени смещение, в уравнении появляется дальнейшее умножение на член $i\omega$.

12.3 Ключевые слова

Моделирование

В этом разделе приводятся значения параметров, касающихся моделирования в целом.

Frequency Real Дайте

частоту моделирования в единицах 1/с. Альтернативно используйте ключевое слово Angular Frequency.

Угловая частота действительная

Дайте частоту моделирования в единицах 1/рад. В качестве альтернативы используйте ключевое слово Frequency.

Решатель решателя идентификатор

Обратите внимание, что все ключевые слова, относящиеся к линейному решателю (начиная с Linear System), могут использоваться и в этом решателе. Они определены в другом месте. Обратите внимание также, что для уравнения Гельмгольца предобуславливание ILUT работает хорошо.

Строка уравнения [Гельмгольц]

Название уравнения.

Файл процедуры ["HelmholtzSolve" "HelmholtzSolver"]

Это ключевое слово используется для того, чтобы указать решателю уравнения Элмера место, где следует искать решатель уравнения Гельмгольца.

Переменная строка [Давление]

Дайте имя переменной поля.

Переменные DOFs Целое число [2]

Это ключевое слово должно присутствовать и ему должно быть присвоено значение 2.

Bubbles Logical Если

установлено значение True, это ключевое слово активирует стабилизацию пузырьков.

Линейная система Предварительная обработка Коэффициент демпфирования Действительный

Действительная часть сдвига η .

Линейная система Предварительная подготовка Коэффициент влажности Im Real

Мнимая часть сдвига η .

Имя переменной скорости Строка

Если есть интерфейс Flow, то можно указать имя переменной скорости гармонического времени. Значение по умолчанию — Flow. Обратите внимание, что обычное поле скорости с реальными значениями не подходит.

Имя переменной смещения `Строка`

Если есть Интерфейс структуры, то можно указать имя переменной смещения гармонического времени. Значение по умолчанию — `Смещение`. Обратите внимание, что нормальное поле смещения с действительным значением не подходит, тогда как комплекснозначная собственная мода подходит.

Переменная смещения Собственная мода `Целое число` Если для

интерфейса используется собственная мода, это ключевое слово используется для указания номера моды.

Переменная частота смещения `Логическая` Если для интерфейса

используется собственная мода, это ключевое слово можно использовать для выбора частоты, которая будет частотой вычисляемой собственной моды.

Material `mat id` Раздел

материала используется для задания значений параметров материала. Для уравнения Гельмгольца могут быть установлены следующие параметры материала.

Реальная скорость звука `Это`

ключевое слово используется для указания скорости звука.

Звукопоглощение `Реальное`

Это ключевое слово используется для указания значения коэффициента затухания D в уравнении (12.4).

Плотность

`Действительная` Плотность материала всегда должна быть указана, чтобы решатель можно было связать с другими решателями гармонических уравнений во времени (хотя в основных случаях решение может не зависеть от значения этого ключевого слова).

Скорость конвекции `Действительная` Если поле

давления конвектируется фоновым полем скорости (как в эффекте Доплера), то это ключевое слово используется для задания поля скорости.

Body Force `bf` идентификатор

Источник давления `Реальный`

Действительная ($i = 1$) и мнимая ($i = 2$) части источника на единицу объема. Используется нечасто.

Граничное условие `bc id`

Раздел граничных условий содержит значения параметров для различных типов граничных условий.

Те, которые связаны с уравнением Гельмгольца,

Давление `Real` Это определяет

граничное условие Дирихле для действительной и мнимой частей решаемой переменной, которая здесь предполагается имеющей имя `Давление`. Значения $i = 1, 2$ соответствуют действительной и мнимой частям поля.

Волновой поток `Real`

Действительная и мнимая части граничного потока, причем значения $i = 1, 2$ соответствуют действительной и мнимой частям потока.

Волновое сопротивление `Real`

Это ключевое слово можно использовать для определения действительной и мнимой частей величины Z в (12.7). Здесь значения $i = 1, 2$ соответствуют действительной и мнимой частям Z .

Плоская волна `BC` `Логическая`

Автоматически устанавливает граничное условие для исходящих плоских волн, если установлено значение `True`.

`Логический` интерфейс потока. Используйте

гармоническое по времени поле скорости для задания потока.

Структура Интерфейс `Логический` Используйте

поле смещения гармоника времени для установки потока.

Модель 13

Линеаризованный Навье-Стокса

Уравнения в частотной области

Название модуля: Акустика

Подпрограммы модуля: AcousticsSolver

Авторы модуля: Мика Малинен

Авторы документа: Мика Малинен

13.1 Введение

Основные акустические уравнения, такие как уравнение Гельмгольца, которое часто принимается за отправную точку в акустическом анализе, основаны на предположении о потоке без потерь, т.е. эффекты вязкости и теплопроводности игнорируются. Однако эти эффекты существенны в тонких зонах вблизи твердой границы. В этой главе описывается система уравнений акустического поля, учитывающая эффекты вязкости и теплопроводности. Рассмотрение ограничивается гармоническим по времени решением этих уравнений.

13.2 Математическая модель

Уравнения акустического поля могут быть получены с использованием общих принципов механики сплошной среды и дополнения этих уравнений подходящими конститутивными уравнениями, применимыми для потока жидкости. Здесь линеаризованные версии таких уравнений используются для вывода приближенной системы уравнений поля, подходящей для задачи акустики малой амплитуды.

Далее поля скорости, плотности, давления и температуры, связанные с потоком, обозначаются соответственно v , p , ρ и T . Обозначения ρ_0 , p_0 и T_0 используются для значений плотности, давления и температуры в состоянии равновесия.

13.2.1 Уравнения поля

Рассмотрим акустические уравнения, основанные на линеаризованном уравнении движения, определяющее уравнение, связывающее напряжение с движением для ньютоновской жидкости, кинематическое соотношение, линеаризованное уравнение неразрывности и

линеаризованное уравнение энергии

$$\begin{aligned} \frac{v}{\rho} &= \sigma + \bar{\rho}_0 b, \quad \rho_0 \quad t \\ \bar{\sigma} &= pI + \lambda (\nabla \cdot v)I + 2\mu D(v), \\ D(v) &= \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T), \\ \frac{p}{du} &= \rho_0 \cdot v, \quad t \\ \kappa &= T \quad \rho_0 \cdot v + \rho_0 h. \quad \rho_0 \quad dt \end{aligned} \quad (13.1)$$

Здесь $\bar{\sigma}$ — тензор напряжений, b — объемная сила (на единицу массы), λ и μ — параметры, характеризующие вязкость жидкости, u — удельная внутренняя энергия, κ — теплопроводность, h — внутренний запас тепла.

Дополним систему (13.1) подходящими уравнениями состояния, предполагая, что свойства среды выражаются как функции двух переменных состояния, скажем, температуры и плотности. Обозначим удельную энтропию (энтропию на единицу массы) и ее равновесное значение через s и s_0 и предположим, что соотношение

$$du = T_0 ds + (p_0/\rho^2) d\rho \quad (13.2)$$

справедливо. Кроме того, мы аппроксимируем уравнения, которые дают изменения давления и удельной энтропии через изменения переменных состояния, следующим образом:

$$p - p_0 = \frac{(\gamma - 1)\rho_0 C_V}{T_0 \beta} (T - T_0) + (\rho - \rho_0) \frac{p_0}{T_0 \beta^2} \quad (13.3)$$

и

$$s - s_0 = \frac{\text{резюме}}{T_0} (T - T_0) - \left(\rho - \frac{\rho_0}{\beta} \right) \frac{1}{T_0 \rho_0 \beta} \quad (13.4)$$

где C_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме (на единицу массы), γ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, а β — коэффициент теплового расширения, определяемый как

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (13.5)$$

Ограничивая рассмотрение случаем гармоники во времени, решения основных неизвестных предполагаются имеющими вид

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v(x) \exp(i\omega t), \quad \rho(x, t) \\ &= \rho_0 + \rho(x) \exp(i\omega t), \\ T(x, t) &= T_0 + T(x) \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (13.6)$$

где ω — угловая частота. Подстановкой (13.6) система уравнений поля, основанная на (13.1)–(13.4), может быть сведена к системе, где единственными неизвестными полями являются амплитуды $v(x)$ и $T(x)$ возмущений полей скорости и температуры. Сведенная система может быть записана как

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma - 1)C_V \rho_0}{\mu} i(\gamma - 1)C_V \rho_0 \frac{T}{\omega \rho_0 \beta} + \frac{(\lambda + \mu)}{\omega T_0 \beta} (\nabla \cdot v) &= \frac{(\gamma - 1)C_V \rho_0}{\omega T_0 \beta} \\ \kappa &= T + i\omega \rho_0 C_V T + \frac{(\gamma - 1)C_V \rho_0}{\omega T_0 \beta} \cdot v = \rho_0 h. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Отмечено, что после решения уравнений скорости и температуры амплитуды $\rho(x)$ и $p(x)$ возмущений полей давления и плотности легко могут быть получены из соотношений

$$\rho = \frac{(\gamma - 1)C_V \rho_0}{\omega T_0 \beta} (T + \frac{\gamma}{\beta T_0 \omega \beta} \cdot v), \quad p = \frac{\gamma}{\beta T_0 \omega \beta} \rho_0 \cdot v \quad (13.8)$$

ой

Для численного приближения система (13.7) переписывается как смешанная задача; для обоснования этого см. [2]. Смешанная формулировка записывается как

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \varphi + i(\gamma - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (i/\omega) \mathbf{b}, \quad (13.9)$$

$$\frac{1}{1 + i\gamma k^2 \eta \beta T_0 \omega^2} \varphi = \frac{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{1 + i\gamma k^2 \eta \beta T_0 \omega^2} \varphi = 0, 1 + i\gamma k^2 \eta \beta T_0 \omega^2$$

где φ — вспомогательная неизвестная величина, τ — масштабированная температура, определяемая как

$$\tau = \frac{\text{упс}}{\gamma k^2} T \quad (13.10)$$

и

$$k = \frac{\text{ой}}{c} = \frac{m}{p_0 \omega} \quad \delta = \frac{KB \mu}{\dots} \quad \eta = \mu \frac{\lambda}{\dots} \quad (13.11)$$

где c — адиабатическая скорость звука, определяемая соотношением

$$T_0 \beta^{2/2} = \gamma(\gamma - 1) C V. \quad (13.12)$$

Следует отметить, что хотя решатель акустических уравнений основан на формуле (13.9), решатель перезаписывает приближения τ и φ немасштабированными температурой и давлением, которые можно выразить как

$$p = p_0 \omega (\tau + \varphi) \frac{1}{1 + i\gamma k^2 \eta \beta T_0 \omega^2} \quad (13.13)$$

Предполагается, что $\beta = 1/T_0$. Это значение получается путем оценки коэффициента теплового расширения для равновесных значений переменных состояния в случае идеального газа.

13.2.2 Граничные условия

К уравнениям поля (13.1) должны быть присоединены подходящие граничные условия. Обычным образом можно задать любую компоненту вектора скорости на границе. В качестве альтернативы, если компонент вектора скорости не задан в точке на границе, можно задать соответствующую компоненту вектора поверхностной силы. Аналогично, в качестве граничного условия для уравнения энергии можно задать либо возмущение температуры, либо нулевой тепловой поток (граничное условие по умолчанию) на границе.

Указание двух импедансов на границе обеспечивает альтернативный способ задания граничных условий в нормальном направлении к границе. Во-первых, можно указать удельный акустический импеданс Z , который определяется как отношение нормальной составляющей вектора поверхностной силы (которая равна давлению в случае невязкой ньютоновской жидкости без объемной вязкости) к нормальной составляющей вектора скорости в точке на границе, т.е. можно указать

$$Z = \frac{\mathbf{n} \cdot \overline{\sigma \mathbf{n}}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}},$$

где $\mathbf{n}$ — внешний единичный нормальный вектор к границе. Во-вторых, можно задать отношение теплового потока к возмущению температуры в точке на границе, указав

$$Z_T = \frac{T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}}{T(\mathbf{x})}.$$

Например, исходящие волны можно аппроксимировать, установив $Z = \rho_0 c$ и $Z_T = i\omega/c$ на границе оттока.

Также могут использоваться граничные условия скольжения. Граничное условие скольжения по скорости, связывающее тангенциальную составляющую вектора поверхностной силы с тангенциальным скачком скорости в точке на границе, записывается в виде

$$\overline{\sigma \mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{CS}{c\sigma} \frac{2(\gamma - 1)CV(T_0 + T_w)}{p} \frac{1/2}{p_0} \rho_0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{t}), \quad (2)$$

где $\mathbf{t}$ — касательный вектор к границе, σ — коэффициент аккомодации импульса, а T_w и v_w — температура и скорость опорной стенки. Здесь опорная температура стенки определяется как отклонение температуры стенки от равновесной температуры T_0 . Аналогичное граничное условие для теплового потока задается выражением

$$c_T \left(\gamma + 1 \right) \frac{2(\gamma - 1)CV (T_0 + T_w)}{p} = T_w, \quad \kappa = \frac{2}{\gamma} \quad (2)$$

где c_T — коэффициент аккомодации энергии.

13.3 Использование блочной предварительной подготовки

Аппроксимация системы (13.9) методом конечных элементов обычно приводит к большим линейным системам, которые должны решаться с использованием предобусловленных итерационных методов. Общие предобуславливатели, доступные в Elmer, не всегда могут работать удовлетворительно, когда размер системы становится все больше и больше. Для облегчения решения больших задач была разработана проблемно-специфическая стратегия решения линейных систем, возникающих из дискретизации (13.9). В этом разделе мы описываем основные черты этого метода решения; полное описание см. в [1].

Обсуждаемая здесь стратегия решения основана на использовании вложенных итераций GCR в сочетании с специальным блок-предобуславливателем. Учитывая линейную систему

$$KU = F$$

стандартный метод GCR генерирует последовательность улучшающихся приближений, так что каждая итерация $U(k)$ минимизирует $\|F - KU(k)\|$ по так называемому подпространству Крылова. Стандартный алгоритм можно легко модифицировать, чтобы можно было гибко выбирать направление обновления. Очевидно, что оптимальное направление обновления будет (k) , заданное текущей ошибкой $U(k)$. Чтобы найти приближение к ошибке, можно применить итерационный метод к

$$K e(k) = r(k),$$

где $r(k) = F - KU(k)$ — остаток. Предварительно обусловленный алгоритм GCR, который использует эту идею для нахождения направления обновления, можно описать следующим образом:

Сформируйте начальную догадку U

$$U(0) = F - KU(0)$$

$k = 0$

пока (критерий остановки не выполнен)

Решить $Ks(k+1) = r(k)$ итеративно, используя не более m шагов итерации

$$Ks(k+1) = Ks(k) + v$$

сделать $j = 1, k(k+1)$

$$v = v(k+1) \quad r(k+1) < v(j), \quad v(k+1) > v(j)$$

$$s = s(k+1) \quad r(k+1) < v(j), \quad v(k+1) > s(j)$$

end do $(k+1) v$

$$U(k+1) = U(k) + v(k+1)/v(k+1) = s$$

$$r(k+1) = r(k) - v(k+1)$$

$$B(k+1) = U(k) + v(k+1), \quad r(k) > s(k+1) \quad (k)$$

$$r(k) < v(k+1), \quad r(k) > v(k+1)$$

$$k = k + 1$$

конец, пока

Здесь скалярное произведение и норма определяются как $\langle v, r \rangle = v \cdot \bar{r}$ и $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Шаги, используемые для обновления приближения U , называются внешними итерациями, в то время как шаги итерации $(k+1)$ предобуславливающего итерационного метода, используемого для решения нового направления поиска s , называются внутренними итерациями.

Здесь алгоритм GCR также используется как внутренний итерационный метод. В связи с внутренними итерациями используется специальный блок-предобуславливатель. Предобуславливание осуществляется путем приближенного решения блочно-треугольной системы вида

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & E & G & X & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \tau \\ \varphi \\ \psi \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sv \\ \tau t \\ r\varphi \\ r\psi \end{pmatrix}, \quad (13.14)$$

где sv , τt и $r\varphi$ — направления обновления ошибок v , τ и φ . Кроме того, ψ — вспомогательная неизвестная величина, введенная для согласованной обработки граничных условий предобуславливателя.

На практике приближенное решение (13.14) строится путем применения итерационных методов к системам типа

$$M\psi = r\varphi, \quad (13.15)$$

$$\begin{matrix} \text{компакт-диск} & \text{ул.} & = & \text{рт} \\ \text{НАПРИМЕР} & \text{сф} & & \text{г}^{\wedge}\varphi \end{matrix} \quad (13.16)$$

и

$$Asv = \hat{r}v, \quad (13.17) \text{ где } \hat{r}^{\wedge}\varphi \text{ и } \hat{r}^{\wedge}v \text{ — модифицированные правые части,}$$

вычисление которых требует оценки определенных произведений матрицы и вектора. Специальный решатель, который мы обсуждаем, требует, чтобы итерации выполнялись на трех уровнях.

Одна из ключевых идей вложенного применения алгоритма GCR заключается в том, что внешнюю итерацию можно сделать быстро сходящейся. Следовательно, оптимальность внешней итерации не нужно жертвовать, используя такие методы, как перезапуск или усечение. Обычно достаточно нескольких внутренних итераций, чтобы произвести полезное сокращение остатка внешней итерации. Поэтому максимальное количество итераций, которое может выполнить внутренний итерационный метод, не обязательно должно быть большим. Мы обнаружили, что ограничение количества внутренних итераций путем взятия $m = 5$ (это значение по умолчанию) или $m = 10$ часто приводит к эффективному методу. В дополнение к указанию максимального количества внутренних итераций пользователь может контролировать сокращение остатка во внешнем итерационном процессе, указав допуск ошибки dinner , так что внутренняя итерация GCR

$$\text{останавливается, если } \|s^{(k+1)} - s^{(k)}\| < \text{dinner} \cdot \|s^{(k)}\|, \quad (13.18)$$

приближение к $s^{(k+1)}$. Значение dinner по умолчанию равно 0,1.

В идеале мягкий критерий остановки должен использоваться при решении линейных систем типа (13.15)–(13.17), которые возникают при блочном предобуславливании внутренней итерации. Итеративное решение (13.15) является дешевой операцией, общая стоимость блочного предобуславливания по существу определяется решением систем типа (13.16) и (13.17). Эти системы решаются с использованием предобуславливающего метода BiCGStab(l). В этой связи могут быть применены предобуславливатели Якоби и неполной LU-факторизации.

13.4 Коммунальные услуги

Диссипативный акустический решатель может быть использован для решения акустического импеданса системы. Значение импеданса определяется как

$$\text{день} = \frac{S_i p \, dS}{\int_V v \cdot (-n) \, dS} \quad (13.19)$$

может быть автоматически рассчитан для заданной границы S . Здесь это сопротивление будет называться удельным акустическим сопротивлением поверхности (S_i).

Акустический импеданс делится на две части: часть в фазе со скоростью и часть в противофазе со скоростью. Значение импеданса z_i имеет смысл только тогда, когда рассматривается скорость на входной границе. Однако можно рассчитать отклик на другой границе S_j и сравнить его с входной скоростью, т. е. можно вычислить

$$\text{она} = \frac{S_j p \, dC}{\int_V v \cdot (-n) \, dS}. \quad (13.20)$$

Это сопротивление здесь называется поперечным удельным акустическим сопротивлением.

13.5 Ключевые слова

Следующие ключевые слова имеют непосредственное отношение к решателю акустики.

Моделирование

Угловая частота *действительная*

Это ключевое слово используется для объявления угловой частоты. В качестве альтернативы можно определить частоту, используя ключевое слово `Frequency`.

`Frequency` *Real* Это

ключевое слово используется для объявления частоты. Альтернативно можно определить угловую частоту, используя ключевое слово `Angular Frequency`.

Тип моделирования *Строка*

Значение этого ключевого слова должно быть либо `Steady State`, либо `Scanning`. Значение `Scanning` может использоваться для получения результатов для нескольких частот с использованием одного `sif`-файла.

Строка системы координат

Система координат должна быть установлена на один из следующих вариантов: декартова 2D, декартова 3D или осесимметричная.

Решатель *решатель-id*

В разделе решателя, содержащем параметры решателя для акустического решателя, можно использовать следующие ключевые слова.

Строка уравнения

Это ключевое слово можно использовать для обозначения дискретных акустических уравнений.

Процедура *Файл Акустика AcousticsSolver*

Это ключевое слово используется для того, чтобы указать решателю Элмера место, где следует искать решатель акустики.

Переменный *поток строк*

Имя `Flow` используется для решения уравнений акустики, состоящих из амплитуд возмущений скорости, температуры и давления из состояния равновесия (обратите внимание, что возмущение плотности не вычисляется явно). Решатель акустики использует соглашение, что если `dim` — это размерность системы координат, то компоненты 1, ..., $2 \times \text{dim}$ потока дают действительную и мнимую части скоростей (`Flow.1` и `Flow.2` — это действительная и мнимая части первой компоненты скорости и т. д.). Решения температуры и давления следуют после решения скорости.

Переменная *Dofs* *Целое число*

Значение этого ключевого слова должно быть равно $2 \times (\text{dim} + 2)$, где `dim` — размерность системы координат.

`Element` *String*

Использование стандартных конечных элементов в аппроксимации акустических уравнений, вероятно, приведет к нестабильному методу. Формулировка конечных элементов может быть стабилизирована путем использования дополнительных пузырьковых функций конечных элементов в аппроксимации скоростей. Если этому ключевому слову присвоено значение `r:1 b:n`, где `n` — целое число, то `n` дополнительных пузырьковых функций, содержащихся в библиотеке `r`-элементов, используются в аппроксимации каждой компоненты скорости.

Пузыри в глобальной системе *логические*

Этому ключевому слову следует присвоить значение `False`, чтобы дополнительные базисные функции пузырьков, необходимые для устойчивости, были устранены посредством статической конденсации.

Использовать предыдущее решение *Логично*

Если для вычисления решений для нескольких частот используется один `sif`-файл, то предыдущее решение может быть использовано в качестве начального предположения для следующего итерационного решения. Это можно сделать, задав значение `True` для этого ключевого слова.

Материальный *идентификатор материала*

Удельная теплота действительная

Это ключевое слово используется для определения удельной теплоты (на единицу массы) при постоянном объеме.

Коэффициент удельной теплоемкости Реальный

Это ключевое слово используется для определения отношения удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

Равновесная плотность действительная

Это ключевое слово используется для объявления плотности в состоянии равновесия.

Равновесная температура Реальная

Это ключевое слово используется для объявления абсолютной температуры в состоянии равновесия.

Теплопроводность Реальная

Это ключевое слово используется для определения значения теплопроводности.

Вязкость Реальная Это

ключевое слово используется для определения значения вязкости μ .

Реальная объемная вязкость

Параметр материала λ определяется путем задания объемной вязкости κ , определяемой по формуле $\kappa = \lambda + 2/3\mu$.

Если значение этого ключевого слова не указано, то предполагается условие Стокса, т.е. значение λ определяется условием $\kappa = 0$.

Источник тепла Re Real

Это ключевое слово используется для определения действительной части источника тепла (на единицу массы).

Я источник тепла настоящий

Это ключевое слово используется для определения мнимой части источника тепла (на единицу массы).

Re Body Force i Real

Это ключевое слово используется для определения действительной части i -й компоненты вектора объемной силы (на единицу массы).

Я Body Force i Real

Это ключевое слово используется для определения мнимой части i -й компоненты вектора силы тела (на единицу массы).

Граничное условие bc-id**Re Velocity i Real Это ключевое**

слово используется для задания действительной части компонента i вектора скорости.

Я Скорость Я Реален

Это ключевое слово используется для задания мнимой части i -й компоненты вектора скорости.

Re Температура Реальная Это

ключевое слово используется для задания действительной части амплитуды возмущения температуры.

Im Temperature Real Это ключевое

слово используется для задания мнимой части амплитуды возмущения температуры.

Re Поверхностное сцепление i Real

Это ключевое слово используется для определения действительной части i -й компоненты вектора поверхностной силы.

Im Surface Traction i Реальный

Это ключевое слово используется для определения мнимой части i -й компоненты вектора поверхностной силы.

Re Удельный акустический импеданс Real Это ключевое слово

используется для определения действительной части отношения нормальной составляющей вектора поверхностной силы к нормальной составляющей вектора скорости в точке на границе.

Im Удельный акустический импеданс. Действительный. Это

ключевое слово используется для определения мнимой части отношения нормальной составляющей вектора поверхностной силы к нормальной составляющей вектора скорости в точке на границе.

Re Удельный тепловой импеданс *Real* Это ключевое слово

используется для определения действительной части отношения нормальной производной температуры к возмущению температуры в точке на границе.

Im Удельный тепловой импеданс *Действительный*. Это

ключевое слово используется для определения мнимой части отношения нормальной производной температуры к возмущению температуры в точке на границе.

Логическая граница скольжения

Значение этого ключевого слова должно быть установлено равным True, если заданы граничные условия скольжения.

Коэффициент аккомодации импульса *Действительный* Это ключевое слово

используется для определения коэффициента аккомодации импульса σ .

Коэффициент аккомодации энергии *Real* Это ключевое слово

используется для определения коэффициента аккомодации энергии σT .

Re Скорость опорной стенки *i Реальная*

Это ключевое слово используется для задания действительной части компонента i скорости опорной стенки.

Скорость опорной стенки *i Реальная*

Это ключевое слово используется для задания мнимой части i -й компоненты скорости опорной стенки.

Реальная температура стенки. Это ключевое слово

используется для определения референтной температуры стенки.

Рассчитать акустический импеданс *Логический*

Это ключевое слово используется для определения границы, для которой рассчитывается удельный акустический импеданс z_i .

Граница целевого импеданса *Логическая* При расчете

перекрестного импеданса z_{ij} это ключевое слово определяет границу S_j .

Граница

входной скорости (S_i) определяется с помощью ключевого слова «Рассчитать акустический импеданс».

Следующие ключевые слова связаны с использованием блочной предварительной подготовки и могут быть приведены в разделе «Решатель».

Решатель решатель-id

Блокировка предварительной обработки *логическая*

Значение этого ключевого слова должно быть установлено равным True, чтобы разрешить использование предварительной подготовки блока.

Максимальное количество внешних итераций *Целое*

число Значение этого ключевого слова определяет максимальное количество внешних итераций.

Максимальное количество внутренних итераций GCR, целое число

Это ключевое слово используется для определения значения параметра m , т.е. максимального количества внутренних итераций. Значение по умолчанию — 5.

Коэффициент сходимости допусков *Реальный*

Это ключевое слово используется для определения критерия остановки внешней итерации. Внешняя итерация останавливается, когда

$$F - KU(k) < (\epsilon_r \times \epsilon)(K - U(k) + \Phi).$$

Здесь ϵ_r определяется с помощью этого ключевого слова, а ϵ — это значение ключевого слова Linear System Convergence Tolerance. Желательно, чтобы $\epsilon_r \geq 1$.

Остаточный коэффициент снижения *реальный*

Это ключевое слово используется для определения значения параметра δ_{inner} в критерии останова (13.18). Значение по умолчанию — 0,1.

Линейная система Сходимость Допуск Действительный

В связи с блочной предобуславливающей обработкой ключевое слово **Линейная системная сходимость** Допуск определяет критерий остановки, используемый в связи с итеративным решением (13.16) и (13.17). В этой связи критерий остановки типа

$$\hat{r}_B(k) - A_S(k)_B < \varepsilon \hat{r}_B(k)_B$$

используется. Здесь ε — значение этого ключевого слова. Отмечено, что для точности решения (13.15) необходимо не может быть указан пользователем.

Скорость Сходимость Допуск Реальный

Системы (13.16) и (13.17) могут быть решены с разной степенью точности. Вместо использования ключевого слова «Допуск сходимости линейной системы» можно указать решение точность для (13.17) с помощью этого ключевого слова.

Шур Дополнение Сходимость Толерантность Реальный

Системы (13.16) и (13.17) могут быть решены с разной степенью точности. Вместо использования ключевого слова «Допуск сходимости линейной системы» можно указать решение точность для (13.16) с помощью этого ключевого слова.

Линейная система Макс. итерации Целое число

В связи с предобуславливанием блока ключевое слово «Максимальное количество итераций линейной системы» используется для определения максимального количества шагов итерации, которые могут быть выполнены в итеративное решение (13.15)–(13.17).

Логическая сборка скорости

Матрица коэффициентов A в (13.17) соответствует блоку (1,1) матрицы коэффициентов K . Поскольку элементы A могут быть извлечены из K , сборку A можно избежать, если использовать диагональ. В итеративном решении (13.17) используется предобуславливание. Если используется неполное факторизационное предобуславливание, матрица A собирается явно. В этом случае значение `True` должно быть дано для этого ключевого слова.

Порядок ILU для целого числа Шура

Значение этого ключевого слова определяет уровень заполнения для неполного LU-факторизационного предварительного обусловливателя, который применяется при итеративном решении линейных систем типа (13.16).

Порядок ILU для скоростей Integer

Значение этого ключевого слова определяет уровень заполнения для неполного LU-факторизационного предварительного обусловливателя, который применяется при итеративном решении линейных систем типа (13.17). Если это ключевое слово не задано, то используется диагональное предварительное обусловливание. Это ключевое слово имеет эффект только тогда, когда Ключевому слову `Velocity Assembly` присвоено значение `True`.

Библиография

- [1] М. Малинен. Граничные условия в дополнении Шура предобуславливание диссипативной акустики уравнения. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29:1567–1592, 2007.
- [2] М. Малинен, М. Лили, П. Рабак, А. Карккэйнени Л. Карккэйнени. Метод конечных элементов для моделирования термовязкостных эффектов в акустике. В P. Neittaanmaki et. al., редактор, Труды 4-й Европейский конгресс по вычислительным методам в прикладных науках и технике, 2004 г.

Модель 14

Волновое уравнение

Имя модуля: WaveSolver

Подпрограммы модуля: WaveSolver

Авторы модуля: Юха Руоколайнен, Петер Рабак, Мика Малинен

Авторы документа: Мика Малинен

14.1 Введение

Этот модуль может быть использован для решения обобщенной версии волнового уравнения во временной области. Он предоставляет альтернативу уравнению Гельмгольца, которое следует из волнового уравнения путем преобразования в частотную область.

14.2 Теория

Этот решатель можно использовать для решения следующей обобщенной версии волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \eta \nabla^2 p + \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = f, \quad (14.1)$$

где c и f — скорость звука и функция источника соответственно. Кроме того, η и α — параметры модели, которые также можно установить равными нулю, чтобы получить стандартное волновое уравнение.

В случае звуковых волн уравнение (14.1) может быть получено из уравнения движения и уравнения непрерывности путем линеаризации. Предполагая изоэнтропическую жидкость и безвихревое течение, мы приходим к рассмотрению системы скорость-давление

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha \nabla p &= \mathbf{0}, \quad P = p_0 b, \quad p_0 = \text{const} \\ \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (14.2)$$

где ρ_0 — плотность жидкости в состоянии равновесия, η — параметр, связанный с вязкостью жидкости, а α — параметр реакции. Если мы используем уравнение непрерывности, чтобы исключить член дивергенции из уравнения движения и положим $\eta = \eta/\rho_0$, $\alpha = \alpha/\rho_0$ и $p = P/\rho_0$, то система скорость-давление может быть также выражена как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\eta}{c^2} \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha \nabla p &= \mathbf{0}, \quad p = b, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Исключение скорости из дифференцированного по времени уравнения неразрывности

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial p}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (14.4)$$

тогда получаем (14.1) с $f = -b$.

Граничные условия. В основном можно задать граничные условия трех типов. В дополнение к базовому ограничению Дирихле можно задать ограничение Неймана

$$p \cdot n = \frac{\eta}{2c} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \cdot n = g. \quad (14.5)$$

При отсутствии массовых сил и реактивных членов ($b = 0$ и $\alpha = 0$) значение g связано с нормальной составляющей ускорения через

$$vg = \frac{1}{t} \cdot \text{сущ.}$$

Последний вариант — установить

$$p \cdot n = \frac{\eta}{2c} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \cdot n = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (14.6)$$

для аппроксимации исходящих волн, особенно когда η мало.

14.3 Ключевые слова

Решатель решателя идентификатор

Следующие ключевые слова особенно связаны с решателем волнового уравнения.

Строка уравнения Это

ключевое слово можно использовать для присвоения имени уравнению, обрабатываемому решателем.

Файл процедуры "WaveSolver" "WaveSolver"

Здесь указывается имя подпрограммы решателя.

Переменная строка «Избыточное давление»

Имя переменной решателя можно выбрать свободно.

Переменная DOFs Целое число Значение

этого ключевого слова должно быть равно 1.

Целое число порядка производной по времени

Нет необходимости использовать это ключевое слово, так как единственное возможное значение — 2, и оно автоматически задается решателем.

Начальное состояние ic-id

Раздел начальных условий может использоваться для установки начальных значений для переменной поля. Форма команд зависит от имени, данного для переменной решателя.

Материал коврика ID

Раздел «Материал» используется для указания значений параметров материала.

Sound Speed Real Это ключевое

слово используется для указания значения скорости звука c .

Реальное затухание звука Это

ключевое слово используется для указания значения параметра η .

Реальное затухание реакции звука. Это ключевое

слово используется для задания значения параметра α .

Body Force bf id Хотя объемные

источники могут встречаться редко, существует возможность указать такой источник.

Источник звука Реальный

Это ключевое слово можно использовать для указания исходной функции f · b .

Граничное условие bc id

Для задания ограничений Неймана и выходных ограничений используются специальные ключевые слова, в то время как ограничение Дирихле может быть задано стандартным образом.

Избыточное давление реальное

Форма команды для задания ограничения Дирихле, естественно, зависит от имени, заданного для переменной решателя.

Источник Ускорение Реальное

Это ключевое слово можно использовать для указания исходной функции g .

Логическая граница оттока

Это ключевое слово может быть использовано для активации использования ограничения (14.6). Альтернативное ключевое слово для той же цели — Plane Wave BC.

Модель 15

Волновое движение большой амплитуды в воздухе

Имена модулей: CompressibleNS

Подпрограммы модуля: CompressibleNS

Авторы модуля: Мика Малинен

Авторы документа: Мика Малинен

15.1 Введение

Этот модуль содержит монолитный решатель для сжимаемых уравнений Навье–Стокса, подчиняющихся идеальному закону газовый закон. Его можно использовать для моделирования полностью нелинейного распространения волн во временной области.

15.2 Математическая модель

Акустическое волновое движение в жидкости обычно характеризуется компрессионными уравнениями Навье–Стокса.

Если среда подчиняется закону идеального газа, так что давление жидкости p удовлетворяет

$$p = p(T), \quad (15.1)$$

Система Навье–Стокса может быть сведена к уравнению движения

$$\rho \left[\frac{dv}{dt} + (v \cdot \nabla) v \right] = -\nabla p + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot v) + R_p \quad T + RT \quad p = b, \quad t \quad (15.2)$$

уравнение энергии

$$\rho CV \left(\frac{dT}{dt} + v \cdot \nabla T \right) = K \nabla^2 T + R_p T \quad \cdot v = 0, \quad t \quad (15.3)$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{dp}{dt} + v \cdot \nabla p + p \cdot \nabla \cdot v = 0, \quad t \quad (15.4)$$

Здесь v , ρ и T — скорость, плотность и температура жидкости соответственно, а свойства материала — выраженные через параметры вязкости μ и λ , теплопроводности K и удельной теплоемкости CV , $R = (\gamma - 1)CV$.

Если p_0 и T_0 — равновесные значения плотности и температуры, то мы можем записать

$$p = p_0 + \delta, \quad T = T_0 + \tau, \quad (15.5)$$

так что δ и τ дают возмущения в p и T . Для решения связанной системы, состоящей из (15.2)–(15.4),

Используется полностью неявная временная интеграция. На каждом временном уровне применяется нелинейная итерация. При условии

нелинейные итерации v_k , τ_k и δ_k , новые приближения генерируются с помощью

$$\begin{aligned} & (p_0 + \delta_k)[(v\tau)^{k+1} + (v_k \cdot \tau_k)^{k+1}] - \mu \cdot v_{k+1} - (\mu + \lambda) \cdot (v_k \cdot \tau_k)^{k+1} \\ & + R(p_0 + \delta_k) \cdot \tau_{k+1} + R(T_0 + \tau_k) \cdot \delta_{k+1} = b, \\ & (p_0 + \delta_k)CV[(\tau\tau)^{k+1} + v_k \cdot \tau_{k+1}] - K \cdot \tau_{k+1} + R(p_0 + \delta_k)(T_0 + \tau_k) \cdot v_{k+1} = 0, (p\tau)^{k+1} + v_k \cdot \delta_{k+1} + (p_0 + \delta_k) \cdot \\ & v_{k+1} = 0, \end{aligned} \quad (15.6)$$

с производными по времени, приближенными с использованием подходящих схем конечных разностей. Рекомендуется использовать метод BDF(2) для дискретизации по времени. Также следует отметить, что давление не аппроксимируется напрямую, поэтому его необходимо вычислять отдельно с использованием (15.1) и (15.5).

Следует отметить, что решатель адаптирован к случаю непрерывной аппроксимации температуры и плотности самого низкого порядка. Для получения устойчивых конечно-элементных решений дискретизация скорости должна быть улучшена путем использования поэлементных пузырьковых функций или путем повышения полиномиального порядка аппроксимации скорости. Поэтому во входном файле решателя должно быть дано специальное определение типа элемента.

15.3 Ключевые слова

Ключевые слова, имеющие непосредственное отношение к данному решателю, описаны ниже.

Моделирование

Строка системы координат Система координат

должна быть установлена на один из следующих вариантов: декартова 2D, декартова 3D или осесимметричная.

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения Имя

уравнению можно дать с помощью этого ключевого слова.

Файл процедуры "CompressibleNS" "CompressibleNS"

Это ключевое слово используется для того, чтобы предоставить решателю Элмера место, где следует искать решатель Навье–Стокса для сжимаемых уравнений.

Переменная Строка Имя

переменной решателя должно быть задано с помощью этого ключевого слова.

Переменные DOF Целое число

Значение этого ключевого слова должно быть равно $\dim + 2$, где $\dim$ — размерность системы координат. Переменные поля организованы таким образом, что первые компоненты $\dim$ соответствуют решению скорости, а флуктуации температуры и плотности следуют после скорости.

Element String Пользователь

должен указать, какая стратегия используется для улучшения аппроксимации скорости, указав определение типа элемента. Если задана команда `Element = "p:2"`, то скорость аппроксимируется с использованием функций формы элементов второго порядка. Определение типа элемента `Element = "p:1 b:1"` может быть задано для улучшения аппроксимации скорости с помощью одной пузырьковой функции.

Материал коврика ID

Равновесная плотность действительная

Равновесная плотность ρ_0 должна быть указана с помощью этого ключевого слова.

Реальная равновесная температура. Равновесная

температура T_0 должна быть указана с помощью этого ключевого слова.

Удельная теплоёмкость Реальная

Значение этого ключевого слова указывает CV .

Коэффициент удельной теплоемкости Реальный

Значение этого ключевого слова указывает γ .

Теплопроводность Реальная

Теплопроводность K следует определять с помощью этого ключевого слова.

Вязкость Реальная Параметр

вязкости μ следует определять с помощью этого ключевого слова.

Объемная вязкость Реальная

Параметр вязкости λ принимается равным $\lambda = k - 2/3\mu$, где k — значение этого ключевого слова.

Body Force bc идентификатор

Физическая сила i . Это ключевое

слово определяет компонент i физической силы.

Часть 4

Модели электромагнетизма

Модель 16

Электростатика

Имя модуля: StatElecSolve

Подпрограммы модуля: StatElecSolver

Авторы модуля: Лейла Пушка, Антти Пурсула, Петер Рабак

Авторы документа: Петер Рабак, Антти Пурсула

16.1 Введение

Макроскопическая электромагнитная теория управляется уравнениями Максвелла. В Элмере можно решить электростатический потенциал в линейном диэлектрике и в проводящей среде. Диэлектрический случай описан в этой главе. Для статических токов см. главу 17. На основе потенциала, различные поля можно рассчитать как переменные, так и физические параметры, такие как емкость.

16.2 Теория

Уравнения Максвелла здесь записываются как

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (16.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (16.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (16.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (16.4)$$

Для линейных материалов поля и потоки связаны просто соотношением $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ и $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, где диэлектрическая проницаемость определяется через диэлектрическую проницаемость вакуума ϵ_0 и относительную диэлектрическую проницаемость материала ϵ_r .

В стационарном случае электрическое поле можно выразить с помощью электрического скалярного потенциала ϕ ,

$$\mathbf{E} = - \nabla \phi. \quad (16.5)$$

Предполагая линейный материальный закон и используя уравнение (16.1), получаем

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla \phi = -\rho. \quad (16.6)$$

Это электростатическое уравнение для непроводящих сред.

Плотность энергии поля равна

$$w = \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon (\nabla \phi)^2. \quad (16.7)$$

Таким образом, полная энергия поля может быть вычислена из

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\text{об}} \varepsilon (\varphi)^2 \, d\Omega. \quad (16.8)$$

Если присутствует только одна разность потенциалов Φ , то емкость C можно вычислить по формуле

$$C = \frac{2E}{\Phi^2}. \quad (16.9)$$

16.2.1 Граничные условия

Для электрического потенциала можно использовать граничное условие Дирихле или Неймана. Граничное условие Дирихле дает значение потенциала на указанных границах. Граничное условие Неймана используется для задания условия потока на указанных границах

$$\varepsilon \varphi \cdot n = g. \quad (16.10)$$

Поток можно определить, например, через поверхностную плотность заряда: $g = \sigma$.

В случае, если объект находится в бесконечном пространстве, конечно, невозможно расширить объем над ним. Вместо этого можно использовать сферически симметричное приближение. Это приводит к потоку, заданному как

$$g = \varepsilon \varphi \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (16.11)$$

Это можно реализовать как дополнительный член системной матрицы, чтобы сохранить линейный характер проблемы.

Проводники часто покрыты тонкими слоями окисления, которые могут содержать статические заряды. Влияние этих зарядов может быть учтено с помощью граничного условия типа Робина, которое объединяет фиксированное значение потенциала на проводнике и условие потока, обусловленное статическими зарядами.

$$g = \frac{\varepsilon h}{\Phi_0 + \frac{1}{2} \varphi + \frac{\rho h}{2}} \quad \text{на границе,} \quad (16.12)$$

где εh и h — диэлектрическая проницаемость и толщина оксидного слоя соответственно, ρ — плотность статического заряда слоя, а Φ_0 — фиксированный потенциал на проводнике.

Обратите внимание, что эта формулировка верна только для тонких слоев. Для большего слоя отдельное тело и источник определено, что следует добавить.

16.2.2 Емкостная матрица

Существует возможность вычисления матрицы емкости. Алгоритм использует исходную матрицу A до того, как заданы начальные условия. Теперь точечные заряды задаются как

$$q = A\varphi. \quad (16.13)$$

Индукцированные заряды на теле можно вычислить путем суммирования точечных зарядов.

Если имеется n различных тел, граничные условия переставляются n раз, так что тело i получает потенциальное единство, в то время как другие имеют нулевой потенциал,

$$X_{\text{леб}} = \frac{1}{\Gamma_j} \quad \text{в.} \quad (16.14)$$

Симметрия матрицы обеспечивается впоследствии установкой

$$C = \frac{1}{2} (C + C^T). \quad (16.15)$$

16.3 Замечания по выходному контролю

Пользователь может контролировать, какие производные величины (из списка электрического поля, электрического потока, электрической энергии, поверхностной плотности заряда и матрицы емкости) будут рассчитываться.

Также доступны два варианта визуализации типов для производных величин. Значения узлов могут быть рассчитаны путем взятия среднего значения производных значений на соседних элементах (постоянные веса).

Это часто приводит к визуальным хорошим изображениям. Другой возможный выбор — взвешивать среднее значение с размером элементов, что более точно и должно использоваться, когда какая-то другая переменная зависит от этих производных значений. Последний выбор также является выбором по умолчанию.

16.4 Ключевые слова

Константы

Диэлектрическая проницаемость вакуума действительная [8.8542e-12]

Решатель решателя идентификатор

Уравнение строки Стат Электро Решатель

Переменный струнный потенциал

Это может быть любое название, если оно последовательно используется в других местах.

Переменные DOF Целое число 1

Степени свободы для потенциала.

Файл процедуры "StatElecSolve" "StatElecSolver"

Ниже перечислены четыре ключевых слова со значениями по умолчанию для управления выводом.

Рассчитать электрическое поле Логика [Верно]

Рассчитать электрический поток логически [True]

Расчет электрической энергии Логический [Ложь]

Рассчитать матрицу ёмкости Логика [Ложь]

Тела емкости Целое число В случае вычисления

матрицы емкости необходимо указать количество тел с различным потенциалом (без учета земли).

Имя файла матрицы емкости Строка Имя файла, в котором

сохраняется матрица емкости. По умолчанию — cmatrix.dat.

Постоянные веса Логические [True]

Используется для включения постоянного взвешивания результатов.

Потенциальная разница действительная

Используется для указания разности потенциалов, для которой вычисляется емкость, когда расчет матрицы емкости не выполняется. Это ключевое слово дает, таким образом, напряжение между электродами простого конденсатора.

Напряжение должно соответствовать потенциалам, определенным в граничных условиях.

Материал коврика ID

Относительная диэлектрическая проницаемость действительная

Body Force идентификатор bodyforce

Плотность заряда Реальная

Граничное условие bc id

Потенциал Реальный

Если имя первичной переменной — потенциал, то это задает граничное условие Дирихле.

Электрический поток Реальный

Граничное условие Неймана в терминах g .

Плотность поверхностного заряда Действительный

Другой способ определения состояния потока. Идентично предыдущему ключевому слову.

Электрическая бесконечность BC Логическая

Сферическая аппроксимация для открытых границ, простирающихся до бесконечности.

Следующие пять ключевых слов используются, если моделируется тонкий слой окисления. Обратите внимание, что они активны только в том случае, если ключевое слово Electric Flux BC установлено на True.

Толщина слоя реальная

Определяет толщину слоя окисления. Предполагается, что он простирается за пределы границы.

Относительная диэлектрическая проницаемость слоя действительная

Относительная диэлектрическая проницаемость оксидного слоя.

Плотность заряда слоя. Реальная плотность

заряда в слое окисления.

Потенциал электрода реальный

Потенциал на проводнике за слоем окисления.

Capacitance Body Integer i Они должны быть

пронумерованы от $i=1$ до Capacitance Bodies. Земля может быть задана напрямую с нулевым потенциалом или со значением 0 для этого ключевого слова. Это определение необходимо только при вычислении матрицы емкости, где потенциал переставляется очень специфическим образом.

Модель 17

Статическая проводимость тока

Имя модуля: StatCurrentSolve

Подпрограммы модуля: StatCurrentSolver

Авторы модуля: Лейла Пушка, Антти Пурсула, Петер Рабак

Авторы документа: Антти Пурсула

17.1 Примечание

Существует векторизованная и многопоточная версия решателя с почти такой же функциональностью (немного больше, немного меньше) как модуль StatCurrentSolveVec.

17.2 Введение

Макроскопическая электромагнитная теория управляется уравнениями Максвелла. Этот модуль решает электростатический потенциал в проводящей среде, позволяя вывести объемные токи и потери электроэнергии (джоулево тепло).

17.3 Теория

В электроквазистатическом приближении уравнения Максвелла записываются как

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (17.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (17.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (17.3)$$

так что электрическое поле может быть выражено через электрический скалярный потенциал ϕ как

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (17.4)$$

Кроме того, уравнение непрерывности для электрических зарядов легко получается из (17.1) и (17.3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (17.5)$$

Закон Ома для проводящих материалов устанавливает связь между плотностью тока и электрическим полем,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (17.6)$$

где σ — электропроводность. Исходя из уравнения непрерывности (17.5) и используя уравнения (17.6) и (17.4), получаем

$$\nabla \cdot \sigma \varphi = \rho t. \quad (17.7)$$

Это уравнение Пуассона используется для решения электрического потенциала. Исходный член часто равен нулю, но в некоторых случаях это может быть необходимо. Векторизованная и многопоточная версия решателя также может использоваться для обработки обобщенного уравнения

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0, \quad \frac{E}{t} \quad (17.8)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость. Эта версия является следствием (17.3).

Объемная плотность тока в проводнике теперь рассчитывается по формуле

$$\mathbf{J} = \sigma \nabla \varphi, \quad (17.9)$$

и плотность потерь электроэнергии, которая превращается в тепло,

$$h = \nabla \varphi \cdot \sigma \nabla \varphi. \quad (17.10)$$

Последнее часто называют джоулевым нагревом. Полная мощность нагрева находится путем интегрирования приведенного выше уравнения по проводящему объему.

Пользователь также может вычислить узловый нагрев, который представляет собой просто интеграл нагрева, измеренного в узлах.

17.3.1 Граничные условия

Для электрического потенциала можно использовать граничное условие Дирихле или Неймана. Граничное условие Дирихле дает значение потенциала на указанных границах. Граничное условие Неймана используется для получения тока $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ на указанных границах

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \sigma \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}. \quad (17.11)$$

17.3.2 Управление мощностью и током

Иногда желаемая мощность или ток системы известны априори. Затем может быть применен дополнительный контроль для управления системой. Когда электрический потенциал был вычислен, мощность нагрева может быть оценена из

$$P = \int_{\text{об}} \nabla \varphi \cdot \sigma \nabla \varphi \, d\Omega. \quad (17.12)$$

Если в системе имеется разность потенциалов U , эффективное сопротивление также можно вычислить по формуле $R = U^2/P$, а эффективный ток — по формуле $I = P/U$.

Управление достигается путем умножения потенциала и всех производных полей на подходящий коэффициент. Для управления мощностью коэффициент равен

$$K_P = P_0/P, \quad (17.13)$$

где P_0 — желаемая мощность. Для управления током коэффициент равен

$$K_I = I_0/I, \quad (17.14)$$

где I_0 — требуемый полный ток.

17.4 Примечание по выходному контролю

Пользователь может контролировать, какие из производных величин (т. е. объемный ток и джоулев нагрев) рассчитываются, а также дополнительно указывать, выводится ли также электропроводность. Последнее полезно, когда проводимость зависит, например, от температуры. Эта функция доступна только для случаев с изотропными (скалярными) проводимостями.

Доступны два способа визуализации полученных величин. Значения узлов можно рассчитать, взяв среднее значение полученных значений по набору соседних элементов (постоянные веса). Это часто приводит к визуально хорошим изображениям. Другая возможность — взвесить среднее значение с размером элементов, что более точно и должно использоваться, когда какая-то другая переменная зависит от этих полученных значений. Последний выбор также является выбором по умолчанию.

17.5 Ключевые слова

Решатель решателя идентификатор

Уравнение Строка Стат Текущий Решатель

Переменный струнный потенциал

Это может быть любое название, если оно постоянно используется в других местах.

Переменные DOF Целое число 1

Степени свободы для потенциала.

Файл процедуры "StatCurrentSolve" "StatCurrentSolver"

Следующие два ключевых слова управляют расчетом производных полей.

Рассчитать объем тока Логический [True]

Расчет джоулевого нагрева Логический [Верно]

Постоянные веса Логические [True]

Используется для включения постоянного взвешивания результатов.

Рассчитать узловой нагрев логически [Верно]

Рассчитайте узловой нагрев, который можно использовать для оптимального связывания уравнения теплопроводности при использовании соответствующих сеток конечных элементов.

Реальное управление мощностью

Применить управление мощностью, при этом желаемая мощность нагрева будет равна P0.

Текущий контроль Реальный

Примените управление током, установив желаемый ток I0.

Материал коврика ID

Электропроводность Реальная

Body Force идентификатор bodyforce

Источник тока Реальный

Это позволяет использовать скалярный источник, хотя он используется нечасто.

Джоуль Тепло Логический

Если этот флаг активен, решатель уравнения теплопроводности автоматически вычислит величину $\phi \cdot \sigma \cdot \phi$ как источник тепла. Затем предполагается, что ϕ называется Потенциалом. Если уравнения теплопроводности нет, этот флаг не имеет никакого эффекта.

Граничное условие bc id

Потенциал Реальный

Дирихле BC для потенциала.

Логический параметр плотности тока BC должен

иметь значение True, если используется BC Неймана.

Плотность тока действительная

Граничное условие Неймана для тока.

Модель 18

Расчет магнитных полей в 3D

Название модуля: Магнитодинамика

Подпрограммы модуля: WhitneyAVSolver, WhitneyAVHarmonicSolver, MagnetoDynamicsCalcFields

Авторы модуля: Юха Руоколайнен, Мика Малинен, Ээлис Такала

Авторы документа: Мика Малинен, Юха Руоколайнен, Юхани Катая, Ээлис Такала, Петер Рабак

18.1 Введение

Этот модуль может быть использован для решения версии уравнений Максвелла в форме AV. Аппроксимация связанной векторной потенциальной переменной A здесь выполняется с использованием векторнозначных (краевых) базисных функций конечных элементов, в то время как классическая интерполяция Лагранжа применяется для вычисления скалярного потенциала V . Крайние конечные элементы ограничивают применимость этого решателя к трехмерным задачам. Помимо выполнения вычислений во временной области, аналогичная версия уравнений может быть также решена в частотной области. Также включены несколько способов обработки стационарных уравнений. Кроме того, может быть вызван дополнительный решатель для получения узловых и поэлементных аппроксимаций производных полей после получения двух потенциалов.

Уравнения над движущимися средами рассматриваются в случае жесткого движения. Это подразумевает, что связанное поле скорости не имеет дивергенции, а градиент скорости является как постоянным, так и асимметричным.

18.2 Уравнения переходного процесса

Если заряд q движется в области, в которой существуют как электрические, так и магнитные поля, то экспериментально обнаружено, что электромагнитная сила, действующая на заряд, движущийся со скоростью v , определяется силой Лоренца

$$F = q(E + v \times B). \quad (18.1)$$

В качестве альтернативы, сила, действующая на элемент объема $d\Omega$, определяется выражением

$$dF = (\rho E + \rho v \times B)d\Omega \quad (18.2)$$

где ρ — плотность заряда на единицу объема. Предполагая короткое время релаксации движения заряда по сравнению с характерным временным масштабом движения тела, мы можем включить понятие такого электромагнитного поля в закон Ома, записав его как

$$J = \sigma(\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}), \quad (18.3)$$

где J — плотность тока, а σ — электропроводность. Альтернативой было бы определение электромагнитного поля E как отношения объемной плотности силы к плотности заряда, но оба определения приводят к выводу, что для объяснения силы Лоренца мы должны иметь

$$E = E + v \times B. \quad (18.4)$$

Заметим, что поскольку наше определение электромагнитного поля зависит от понятий силы и заряда, которые предполагаются инвариантными величинами (при смене наблюдателя), электромагнитное поле также имеет инвариантную природу. Здесь подразумевается, что если бы разделение известного электромагнитного поля на его электрическую и магнитную компоненты было бы найдено с помощью (18.4), результат зависел бы от наблюдателя. Однако нам не понадобится такое разделение, поскольку решения для E достаточно, чтобы найти плотность тока.

В противном случае содержание электромагнитных уравнений в области Ω здесь преобразуется в магнитную версию Уравнения Максвелла

$$\text{ротор } E = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (18,5)$$

$$\frac{1}{\mu} \text{локонт}(\nabla \times B) = J = g, \quad (18,6)$$

$$\text{div } B = 0, \text{ div } J = 0, \quad (18,7)$$

$$0, \quad (18,8)$$

где μ — проницаемость, а g — бездивергентный источник, удовлетворяющий (способы обеспечения этого условия заранее см. в описании проекции Гельмгольца в контексте стационарных уравнений ниже)

$$\text{div } g = 0. \quad (18,9)$$

Записывая эту систему в терминах электромагнитного поля, определяемого формулой (18.4), исключая E и используя закон Ома (18.3), получаем

$$\frac{1}{\mu} \text{ротор}(\nabla \times B) + \text{ротор } E = 0, \quad (18.10)$$

$$\frac{1}{\mu} \text{локонт}(\nabla \times B) - \sigma E = g, \mu \quad (18.11)$$

$$\text{div } B = 0, \text{ div}(\sigma E) \quad (18.12)$$

$$= 0. \quad (18.13)$$

Содержание этой системы достаточно для нахождения мгновенных пространственных решений $B(x, t)$ и $E(x, t)$ в момент времени t одновременно как над статическими, так и над движущимися частями модели. Здесь точка x , таким образом, задается своими координатами относительно единственной, неподвижной декартовой системы координат.

Если модель Элмера содержит движущиеся тела, пространственная дискретизация обычно выполняется по мгновенной конфигурации, представление которой получается посредством жесткого движения предыдущей сетки в текущую конфигурацию. В этом случае механизм шага по времени Элмера по умолчанию производит приближение к материальной производной по времени пространственного поля (материальная точка удерживается фиксированной в дифференциации), когда поле является скалярным полем. Это согласуется с обычным определением существенной (или полной) производной по времени пространственного поля. Однако, когда поле является одной формой и аппроксимируется с помощью конечных элементов на кромках (в данном случае случай векторного потенциала), необходим более тонкий подход, чтобы показать, что вычислительная процедура приводит к приближению производной Ли [2].

Поскольку вычислительная процедура не позволяет напрямую оценить стандартные частные производные по времени, необходимость переписать уравнения в формах, которые используют другие производные по времени, возникает как естественное стремление. Для этого мы рассмотрим верхнюю конвективную производную по времени [1]

$$\frac{dB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (v \cdot \nabla) B - (B \cdot \nabla) v + (\text{div } v) B, \quad (18.14)$$

что согласуется с производной Ли $L_v B$ вектора B относительно v , когда движение является жестким, так что

$$\text{div } v = 0. \quad (18.15)$$

Его можно выразить через существенную производную по времени

$$\frac{dB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (v \cdot \nabla) B \quad (18.16)$$

как

$$\frac{dB}{dt} = \frac{DB}{dt} (B \cdot v) + (\operatorname{div} v)B. \quad (18.17)$$

Используя векторные тождества, определение (18.14) можно также переписать как

$$\frac{dB}{dt} = \frac{B}{\tau} \operatorname{curl}(v \times B) + v(\operatorname{div} B). \quad (18.18)$$

Отсюда сразу следует, что в соответствии с законом Гаусса для магнитного поля (18.12) содержание закона Фарадея (18.10) можно выразить как

$$\frac{DB}{dt} + \operatorname{curl} E = 0. \quad (18.19)$$

Хотя мы считаем (18.19) удобным способом выражения закона Фарадея для наших целей, мы не хотим утверждать, происходит ли это полезное математическое сокращение случайно или его следует рассматривать как отражающее некую теоретическую основу.

Если мы думаем об A как об одной форме, то формула для производной Ли от A по v должна быть следующей: записывается как (см., например, [2])

$$LvA = + (v \cdot \nabla) A + (\nabla v)^T A. \quad (18.20)$$

Однако в случае жесткого движения градиент скорости асимметричен, так что

$$(\nabla v)^T = -\nabla v. \quad (18.21)$$

Следовательно, векторные представления для дифференцирования Ли векторов и единичных форм становятся одинаковыми.

Когда базисные функции конечного элемента края, определенные на опорном элементе, дают обратный откат базисных функций на физическом элементе с помощью отображения элемента (стандартная конструкция, которой придерживается Элмер), оценка скорости изменения связанных степеней свободы дает коэффициенты для аппроксимации интерполянта конечного элемента производной Ли. То есть, если $\phi_k(\cdot)$ являются линейными функционалами, которые определяют степени свободы одной формы, то отсюда следует, что

$$\phi_k(LvA) := \frac{1}{\delta t} [\phi_k(A(\cdot, \tau + \delta t)) - \phi_k(A(\cdot, \tau))] \quad (18.22)$$

где τ — фиксированное значение времени, а δt — приращение времени. Таким образом, запись уравнений таким образом, чтобы использовались производные Ли, представляется весьма естественной.

На практике решение ищут в терминах потенциалов. В первую очередь ставим

$$B = \operatorname{rot} A. \quad (18.23)$$

Следует отметить, что это подразумевает некоторую двусмысленность, поскольку полученный набор уравнений не имеет единственного решения без наложения дополнительных ограничений на $A(x, t)$. В противном случае, если A удовлетворяет уравнениям, любое поле A_ϕ , имеющее разложение $A_\phi = A + \phi$, также может быть сделано решением. Единственность A может быть обеспечена, например, путем поиска $A(\cdot, t) \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H(\operatorname{div}, \Omega)$, которое удовлетворяет дополнительно

$$\operatorname{div} A = 0$$

на Ω и

$$A \cdot n = 0$$

на границе $\partial\Omega$.

В случае векторного потенциального описания (18.23) закон Фарадея в форме (18.10) дает

$$\operatorname{rot} \left(\frac{A}{\tau} \times \operatorname{rot} A + E \right) = 0, \quad t$$

поэтому мы можем автоматизировать выполнение закона Фарадея, найдя решение в форме

$$\frac{A}{\tau} \times \operatorname{rot} A + E = \nabla \psi, \quad (18.24)$$

где ψ — неизвестный скалярный потенциал. Переход к существенной производной по времени дает

$$\frac{dA}{dt} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{E} = -\nabla \psi. \quad (18.25)$$

Прямой расчет показывает, что это эквивалентно

$$\frac{dA}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^T \mathbf{v} + \mathbf{E} = -\nabla \psi \quad (18.26)$$

и, используя векторное тождество

$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) \nabla^T \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{A}, \quad (18.27)$$

далее получаем

$$\frac{dA}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{A} + \mathbf{E} = -\nabla (\psi + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (18.28)$$

Установив

$$\psi = V + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad (18.29)$$

содержание (18.28) можно окончательно выразить как

$$L_v \mathbf{A} + \mathbf{E} = -\nabla V. \quad (18.30)$$

Уравнение (18.30) дает возможность исключить поле $\mathbf{E}$ из множества первичных неизвестных. Следует отметить, что в то время как дополнительное ограничение (18.13) служит для определения скаляр V , потенциал ψ связан с полем $\mathbf{E}$ через

$$-\frac{1}{c} \frac{dA}{dt} + \mathbf{E} = -\nabla \psi.$$

Соотношение (18.29) можно использовать для восстановления ψ после решения $\mathbf{A}$ и V .

Чтобы вывести слабую версию уравнений, пусть $\mathbf{v}$ будет подходящей тестовой функцией для V , так что мы имеем $\mathbf{v} \cdot \nabla = 0$ на $\partial \Omega$. Умножение (18.13) на $\mathbf{v}$, интегрирование по частям и использование (18.30) приводят нас к слабой формулировке

$$\int_{\Omega} \sigma(L_v \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\partial \Omega} \sigma \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_{\Omega} (\sigma \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega. \quad (18.31)$$

Определение скалярного потенциала V , таким образом, связано с возможностью задания либо V , либо нормальной составляющей плотности тока $\sigma \mathbf{E}$ на границе. Если нормальная составляющая плотности тока задана на всей границе $\partial \Omega$ как

$$(\sigma \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = j_n, \quad (18.32)$$

граничные данные должны удовлетворять условию совместимости

$$\int_{\partial \Omega} j_n \, dS = 0.$$

С другой стороны, используя (18.23) и (18.30), мы можем переписать (18.11) как

$$L_v(L_v \mathbf{A}) + \sigma \mathbf{V} + \text{ротор}(\text{ротор } \mathbf{A}) = \mathbf{g} + \mu \quad (18.33)$$

чтобы получить слабую версию

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(L_v \mathbf{A}) \cdot \eta \, d\Omega + \int_{\partial \Omega} \sigma \mathbf{V} \cdot \eta \, dS + \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \text{ротор } \mathbf{A} \cdot \text{ротор } \eta \, d\Omega = \\ + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \text{локотон } \mathbf{A} \right) \cdot (\eta \times \mathbf{n}) \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{d}\Omega, \end{aligned} \quad (18.34)$$

где η — подходящая тестовая функция, соответствующая A . Слабые формулировки, полученные из (18.34) и (18.31), в общем случае составляют основу для AV-формулировки задачи.

Следует отметить, что здесь мы избежали поиска единственного решения в пространстве

$$A(\cdot, t) \in H(\text{curl}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$$

поскольку только требование $A(\cdot, t) \in H(\text{rot}, \Omega)$ кажется необходимым в этом выводе. Реализация Элмера опирается на это минимальное предположение регулярности, так что конечноэлементное приближение $A_h(\cdot, t)$ ищется из конечноэлементного пространства краевого $X_h \subset H(\text{rot}, \Omega)$. Однако это упрощение приводит к неудобству, заключающемуся в том, что нельзя гарантировать единственность решения векторного потенциала. Таким образом, имея решение (A, V) , мы можем сгенерировать другое решение $(A\varphi, V\varphi) = (A + \varphi, V - \text{L}v\varphi)$, хотя связанные поля B и E остаются неизменными.

Стационарное решение эволюционных уравнений. Иногда стационарное решение эволюционной модели может представлять интерес. Например, стационарное решение случая, когда однородный диск вращается с постоянной угловой скоростью в области, в которой существует постоянное магнитное поле без окружного изменения, можно описать в фиксированной области. Тогда (18.24) дает

$$E = v \times \text{ро́тор } A = -\dot{\psi}. \quad (18.35)$$

В этом частном случае скалярная потенциальная переменная решателя принимается равной ψ .

В этой связи отметим, что при жестком вращении тела вокруг прямой, проходящей через начало координат o , охватываемой угловой скоростью ω , поле скоростей описывается формулой

$$v(x, t) = v(o, t) + \omega(t) \times (x - o). \quad (18.36)$$

Отметим также, что представление $\nabla \cdot v$ в выражении для производной Ли имеет следующий вид термина $(\nabla \cdot v)$ в терминах ω

$$(\nabla \cdot v)^T A = (\nabla \cdot v)A = -\omega \times A. \quad (18.37)$$

Теорема Пойнтинга для электромагнитной энергии. Плотность магнитной энергии определяется как

$$1 \text{ Дж} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2. \quad (18.38)$$

Определим вектор Пойнтинга S , соответствующий нашему определению электромагнитного поля E , следующим образом:

$$S = E \times H, \quad (18.39)$$

при $B = \mu H$. Тогда с учетом (18.19) и (18.11) получаем

$$\begin{aligned} \text{div } S &= \text{завиток } E \cdot H - E \cdot \text{завиток } H \\ &= \frac{D B \cdot}{dt} H - E \cdot (\sigma E + g). \end{aligned} \quad (18.40)$$

С другой стороны, производная Ли плотности магнитной энергии (обратите внимание, что для скалярных функций выражения производной Ли и полной производной эквивалентны) определяется выражением

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu_0 H \cdot H \right) = \nabla \cdot H. \quad (18.41)$$

Отсюда мы приходим к принципу сохранения магнитной энергии, выраженному как

$$\frac{D W_m}{dt} + \text{div } S = -E \cdot (\sigma E + g). \quad (18.42)$$

Правая часть (18.42) описывает мощность теплового эффекта электрического тока на единицу объема, называемую эффектом Джоуля.

Поскольку ток смещения был проигнорирован в магнитной версии рассматриваемых уравнений, указанный выше принцип сохранения не содержит члена плотности электрической энергии. Однако Элмер вычисляет полную плотность электромагнитной энергии как

$$W_m + W_e = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (18.43)$$

Где знак равно $\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$.

Здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость.

Решение в частотной области. Уравнения в форме AV также могут быть решены в частотной области. В этом случае анзац $A(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$ и $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$ делается для получения аналогичного набора уравнений для определения комплекснозначных амплитуд $A(\mathbf{x})$ и $V(\mathbf{x})$. Кроме того, мы используем (18.24) с $\psi = V$.

18.3 Стационарные уравнения и проекция Гельмгольца источника

В стационарном случае электрическое поле $\mathbf{E}$ — это просто градиент скалярного потенциала. Слабая формулировка, основанная на (18.34) и (18.31), упрощается до

$$\int_V \nabla V \cdot \nabla \eta d\Omega + \int_V \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \eta d\Omega + \mu \int_V (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) dS = \int_V \mathbf{g} \cdot \nabla \eta d\Omega \quad (18.44)$$

$$\int_V \nabla V \cdot \nabla \eta d\Omega = \int_V (\sigma \mathbf{E}) \cdot \nabla \eta d\Omega \quad (18.45)$$

Поскольку решение V и $\mathbf{A}$ можно затем выполнить последовательно, сначала решив для V , основной сценарий для V , применяя решатель к стационарным случаям, то только поле $\mathbf{A}$ решается с использованием слабой формулировки.

$$\frac{1}{M} \int_V \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \eta d\Omega + \frac{1}{M} \int_V (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) dS = \int_V \mathbf{g}_S \cdot \nabla \eta d\Omega \quad (18.46)$$

где $\mathbf{g}_S$ обозначает статический источник.

Следует отметить, что источник должен быть, как правило, свободным от расходимости. Свободность от расходимости $\mathbf{g}_S$ может быть обеспечена путем установки $\mathbf{g}_S = P(\mathbf{g}_U)$, где $\mathbf{g}_U$ — это предоставленный пользователем исходный член, а проекция Гельмгольца $P(\mathbf{g}_U) = \mathbf{g}_U - \nabla Q$, где $Q = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{g}_U \cdot \nabla \eta d\Omega$, определяется через требование

$$\int_V (\mathbf{g}_U - \nabla Q) \cdot \nabla \eta d\Omega = 0 \quad (18.47)$$

для любого допустимого изменения η от Q . Интегрирование по частям используется для получения версии

$$\int_V \mathbf{g}_U \cdot \nabla \eta d\Omega = \int_V \mathbf{g}_U \cdot \nabla \eta d\Omega - \int_V P(\mathbf{g}_U) \cdot \nabla \eta dS. \quad (18.48)$$

Если $\mathbf{g}_U$ уже получено из скалярного поля V как

$$\mathbf{g}_U = -\sigma \nabla V, \quad (18.49)$$

Чтобы получить близкое сходство $\mathbf{g}_U$ и $P(\mathbf{g}_U)$ (особенно, $P(\mathbf{g}_U) = \mathbf{g}_U$, когда $\mathbf{g}_U$ уже не имеет расходимости), естественно положить

$$P(\mathbf{g}_U) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_U \cdot \mathbf{n} \quad (18.50)$$

На границе, где была задана плотность тока. На оставшейся части границы, где было задано ограничение Дирихле для V , можно использовать однородное ограничение Дирихле для поля Q .

Однако по умолчанию применяется другая стратегия, устанавливая $Q = 0$ на участках, где $|\mathbf{gU} \cdot \mathbf{n}| = 0$. Тогда граничный интеграл в (18.48) обращается в нуль. Проекция Гельмгольца источника также может быть выполнена при обработке эволюционной версии уравнений.

Другие типы векторов источника также могут быть рассмотрены, поскольку пользователь обычно может указать источник в форме

$$\mathbf{g} = P(\mathbf{gU}) + \text{ротоп} M_s \quad \sigma \cdot \mathbf{V} \quad (18.51)$$

или, если проекция Гельмгольца не применяется,

$$\mathbf{g} = \mathbf{gU} + \text{ротоп} M_s \quad \sigma \cdot \mathbf{V} \quad (18.52)$$

Здесь M_s называется намагничиванием. Оно возникает из использования конститутивного закона вида

$$\mathbf{H} = \mu \quad \mathbf{B} \quad M_s \quad (18.53)$$

Последние члены в (18.51) и (18.52) позволяют напрямую генерировать плотность электрического тока источника через потенциал источника V_s без предварительного вычисления $\mathbf{gU}$ из (18.49).

В заключение отметим, что также возможно решить стационарные уравнения таким образом, что и A , и V будут рассматриваться как неизвестные и решаются одновременно с использованием вариационных уравнений

$$\sigma \cdot \mathbf{V} \cdot \eta \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{ротоп} \mathbf{A} \cdot \text{ротоп} \eta \, d\Omega + \mu \int_{\Omega} (\text{рот} \mathbf{A}) \cdot (\eta \times \mathbf{n}) \, dS = \mu \int_{\Omega} P(\mathbf{gU}) \cdot d\Omega \quad (18.54)$$

и

$$\sigma \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (18.55)$$

18.4 Граничные условия

Из слабых версий (18.34) и (18.31) видно, что если ограничения типа Дирихле

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} \text{ и } V = \hat{v} \quad (18.56)$$

не заданы, можно указать тангенциальные составляющие магнитного поля $\mathbf{H} = (1/\mu)\mathbf{B}$ и нормальную составляющую плотности тока $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Их можно определить, указав $\mathbf{h}$ для определения

$$\int_{\Omega} \text{ротоп} \mathbf{A} = \mathbf{n} \times \mathbf{h} \times \mathbf{n}, \mu \quad (18.57)$$

и

$$(\sigma \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}. \quad (18.58)$$

Отметим, что наложение ограничения Дирихле является полезным способом гарантировать уникальность скалярного потенциала V , который в противном случае определялся бы только с точностью до константы.

Обобщение (18.57) в стиле Робина приводит к граничному условию

$$\int_{\Omega} \text{ротоп} \mathbf{A} = \alpha(\mathbf{A} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times \mathbf{h} \times \mathbf{n}, \mu \quad (18.59)$$

где α — заданный параметр. Однако мы отметим, что случай $\alpha = 0$ может не иметь физической интерпретации. С другой стороны, обобщенная версия (18.58) записывается как

$$(\sigma \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} - \beta V, \quad (18.60)$$

что в стационарном случае сводится к граничному условию Робина

$$\sigma \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} + \beta V = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}. \quad (18.61)$$

Кроме того, можно применить процедурный метод для задания ограничения Дирихле для A , когда на границе задана нормальная составляющая плотности магнитного потока B .

Условие поверхностного импеданса для случаев гармонического времени. В случае анализа гармонического времени можно генерировать тангенциальные поверхностные токи, задавая граничное условие

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = Z_S(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad (18.62)$$

где Z_S называется поверхностным импедансом и определяется как

$$Z_S = \frac{1 + j}{\sigma \delta} \quad (18.63)$$

Здесь δ обозначает глубину скин-слоя

$$\delta = 2/(\sigma \omega \mu_0) \quad (18.64)$$

18.5 Последовательно регуляризованная формулировка для магнитостатики

Возможность поиска единственного решения векторного потенциала для уравнений магнитостатики включена здесь как частный случай посредством использования скалярной переменной для наложения бездивергентного ограничения на $\mathbf{A}$ слабым образом. Эта стратегия использует слабую формулировку

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla \eta \, d\Omega &= \int_{\Omega} \varphi \cdot \nabla \eta \, d\Omega = \int_{\Omega} P(gU) \cdot \nabla \eta \, d\Omega, \\ \int_{\Omega} (\mathbf{A} + k \nabla \varphi) \cdot \nabla q \, d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (18.65)$$

где $\varphi \in H^1(\Omega)/P_0(\Omega)$ (определение пространства $H^1(\Omega)/P_0(\Omega)$ отражает тот факт, что φ может быть определено только с точностью до свободно выбранной константы), а k является параметром регуляризации/стабилизации. Выбор $k = 1$ представляется естественным. Тогда, если $P_A \mathbf{A} = \nabla \varphi$ обозначает проекцию Гельмгольца $\mathbf{A}$, содержание этой формулировки также можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \text{rot} \eta \, d\Omega &= \int_{\Omega} (\mathbf{A} - P_A \mathbf{A}) \cdot \nabla \eta \, d\Omega = \int_{\Omega} P(gU) \cdot \nabla \eta \, d\Omega, \\ \int_{\Omega} P_A \mathbf{A} \cdot \nabla q \, d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (18.66)$$

Эта формулировка отражает, как работает схема; второй член в левой части первого уравнения в (18.66) действует как штрафной член, чтобы попасть в правильный набор решений без дивергенции. То есть, $\mathbf{A} - P_A \mathbf{A} = 0$ обеспечивается наличием этого члена. Отмечено, что при $k = 0$ метод сводится к стандартной формулировке множителей Лагранжа для наложения кулоновской калибровки.

18.6 Ключевые слова

Ключевые слова для WhitneyAVSolver

Здесь мы перечислим ключевые слова, которые имеют отношение к решению эволюционных и стационарных версий уравнений путем вызова подпрограммы решателя WhitneyAVSolver и которые также могут быть общими для других решателей. Такие общие ключевые слова относятся к указанию материальных параметров, объемных сил и граничных условий.

Константы

Проницаемость Вакуума Реальная

Эта константа имеет значение по умолчанию $4\pi \cdot 10^{-7}$.

Материал коврика ID

Следующие параметры материалов могут использоваться всеми решателями модуля.

Электропроводность *Real* Это ключевое слово

используется для указания электропроводности σ . Если материал анизотропен, электропроводность также может быть определена как тензорная функция, задавая ее компоненты относительно глобальных координатных линий.

Relative Permeability *Real* Если используется это

ключевое слово, проницаемость μ может быть определена в терминах проницаемости вакуума. Чтобы получить проницаемость, значение этого ключевого слова затем внутренне умножается на проницаемость вакуума. Вместо использования этого ключевого слова можно использовать ключевые слова *Permeability* или *Reluctivity*.

Проницаемость *Реальная* Это

ключевое слово может использоваться для непосредственного указания проницаемости μ .

Reluctivity *Real* Значение этого

ключевого слова определяет удельную магнитную проницаемость ν . Тогда проницаемость принимается равной $\mu = 1/\nu$. Удельную магнитную проницаемость также можно принять в качестве параметра, имеющего значение массива, для моделирования магнитной анизотропии.

Решатель *решателя* идентификатор

Уравнение *строки* *WhitneySolver*

Описывающее имя для дискретной модели, обрабатываемой этим решателем, может быть дано с помощью этого ключевого слова. Имя может быть изменено, если оно используется последовательно.

Файл процедуры *"Magnetodynamics" "WhitneyAVSolver"*

Это объявление определяет имя подпрограммы решателя.

Переменная *строка* *AV* Имя

переменной может быть выбрано свободно при условии, что оно будет последовательно использоваться и в других местах. Соответствующее число степеней свободы всегда должно быть равно единице.

Элемент

Процедура инициализации по умолчанию должна автоматически давать подходящее определение типа элемента, так что значение этого ключевого слова не обязательно должно указываться пользователем.

Использовать *логическое* преобразование *Пиолы*

Для пространственной дискретизации можно использовать несколько типов конечных элементов ребер. Этому ключевому слову должно быть присвоено значение *True*, когда базисные функции для интерполяции элементов ребер выбираются в качестве членов оптимального семейства элементов ребер или когда используется аппроксимация второго порядка. Элементы оптимального семейства обеспечивают оптимальную точность даже тогда, когда физические элементы не получены как аффинные изображения опорных элементов. Более простые базисные функции, которые используются в противном случае, могут не обеспечивать такую точность для неаффинных форм элементов. Документацию базисных функций краевых элементов см. в приложениях к ElmerSolver Manual.

Квадратичная аппроксимация *логическая*

Это ключевое слово можно использовать для активации аппроксимации с помощью граничных конечных элементов второй степени; см. также ключевое слово *Use Piola Transform*.

Статическая проводимость *Логическая*

Если стационарные уравнения решаются таким образом, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{V}$ обрабатываются как неизвестные, этому ключевому слову можно присвоить значение *True*, чтобы решатель мог создать автоматическое значение для ключевого слова *Element*.

Фиксированная *логическая* плотность входного тока

Чтобы обеспечить отсутствие расхождений исходного термина посредством выполнения проекции (18.47), для этого ключевого слова следует задать значение *True*.

Автоматизированная проекция источника *BCs* *Логическая*

Если проекция (18.47) применяется к указанному пользователем источнику $\mathbf{gU}$, решатель изначально автоматически ограничивает поле $\mathbf{Q}$ таким образом, что $\mathbf{Q}$ выбирается для удовлетворения нулевого условия Дирихле на частях, где $|\mathbf{gU} \cdot \mathbf{n}| = 0$. Эту функцию можно отключить, задав значение *False* для этого ключевого слова, чтобы указать, например, однородное ограничение Дирихле для $\mathbf{Q}$ (известное как

поле $J(\mathbf{x})$ на границах, где скалярный потенциал V или V_s ограничен связью Дирихле.

Использовать калибровочную логическую функцию

Лагранжа. Это ключевое слово должно иметь значение True, чтобы перейти к регуляризованной формулировке (18.65), которая имеет единственное решение векторного потенциала.

Коэффициент штрафования калибровочной функции Лагранжа Действительный.

Это ключевое слово определяет параметр стабилизации k в (18.65).

Использовать логическую шкалу дерева

Из-за выбранной дискретизации векторный потенциал недостаточно ограничен, чтобы гарантировать уникальность. Несмотря на это, ожидается, что итерационные решатели смогут генерировать согласованное решение среди многих. Однако для включения решения с прямыми решателями этому ключевому слову по умолчанию присваивается значение True, так что применяется специальная техника для дополнительного ограничения дискретной переменной векторного потенциала (в случае итерационных решателей значение по умолчанию — False). Эта опция не поддерживается, если задано Use Piola Transform = True.

Линейная система Рефакторинг Логический

Отмечено, что если рефакторизация системной матрицы управляется этим ключевым словом, то факторизация матрицы в любом случае пересчитывается автоматически, если размер временного шага отличается от предыдущего.

Линейная система Предварительная строка обуславливания

Здесь значение None может обеспечить лучшую производительность, чем стандартные предобуславливатели ILU, поскольку нулевое пространство системной матрицы может быть нетривиальным, что приводит к проблеме сингулярности в связи с обработкой разложения LU.

Линейная система Итеративный метод Строка

Итерационные решатели BiCGStab или BiCGStab(L) могут работать хорошо.

Body Force $\mathbf{b}_f$ идентификатор

В разделе объемной силы пользователь может задать различные объемные источники, содержащиеся в векторе $\mathbf{g}$, как определено в (18.51) или (18.52). Поле скорости, связанное с жестким движением, также может быть определено для случаев, когда эта информация явно необходима для записи уравнений.

Плотность тока $\mathbf{i}$ действительная

Это ключевое слово используется для указания компонентов исходного $\mathbf{g}_U$.

Намагничивание $\mathbf{i}$ Реальное

Это ключевое слово используется для указания компонентов намагниченности M_s я, при $i = 1, 2, 3$.

Электрический потенциал реальный

Это ключевое слово определяет электрический потенциал источника V_s .

Угловая скорость $\mathbf{i}$ действительная

Когда скорость явно необходима, это ключевое слово может быть задано для определения компонентов угловой скорости ω . Затем это используется для получения представления для члена скорости в уравнении (18.35).

Скорость Лоренца $\mathbf{i}$ Действительная

Это ключевое слово может быть использовано для определения скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, когда ищется решение стационарного состояния эволюционной модели. В качестве альтернативы, если скорость задана формулой (18.36) и задана угловая скорость ω , может быть задано постоянное значение для указания равномерной части $\mathbf{v}(\mathbf{o}, t)$ скорости.

Граничное условие $\mathbf{bc_id}$

Как объяснялось, возможны две версии условий Дирихле в связи с формулировкой AV. Первая версия относится к заданию значения скалярного потенциала, в то время как другая версия используется для задания тангенциальных компонент поля векторного потенциала. Предполагая, что решающая переменная — AV, мы можем использовать следующие ключевые слова для задания условий Дирихле:

Реал

Это ключевое слово используется для задания условия Дирихле для скалярного потенциала V , , который является аппроксимируемого с помощью стандартной интерполяции Лагранжа.

AV {e} j Real Это

ключевое слово используется для задания вектора a в (18.56) с целью задания степеней свободы, соответствующих интерполяции краевого элемента векторного потенциала. Значение этого ключевого слова определяет компонент a_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, относительно глобальной декартовой системы координат.

Jfix Реальный

Это ключевое слово используется для задания условия Дирихле для скалярного потенциального поля Q , которое определяется с помощью (18.47).

Для обработки граничных условий, связанных с потоком, можно использовать следующие ключевые слова:

Сила магнитного поля i Реальная

Это ключевое слово может быть использовано для определения компонентов h_i вектора h , так что граничные условия (18.57) и (18.59) могут быть наложены. Следует отметить, что на интерфейсе между постоянным магнитом с заданной намагниченностью M_s и материалом без намагниченности ($M_s = 0$) граничное условие $\mathbf{m} \times (\mathbf{v}_1 B_1 - \mathbf{v}_2 B_2) = \mathbf{m} \times M_s$ накладывается по умолчанию, причем $\mathbf{m}$ является нормальным вектором, связанным с общим интерфейсом.

Плотность электрического тока действительная

Это ключевое слово можно использовать для определения плотности электрического тока j_n в граничных условиях (18.58) и (18.60).

Плотность тока действительная

Если применяется проекция Гельмгольца источника, это ключевое слово можно использовать для указания левой части в (18.50) как $\mathbf{g} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = j_n$, где j_n — значение этого ключевого слова.

Коэффициент магнитного переноса Действительный

Значение этого ключевого слова дает параметр α в граничном условии (18.59).

Коэффициент электрической передачи Действительный Значение

этого ключевого слова дает параметр β в граничном условии (18.60).

Наконец, следующие ключевые слова относятся к процедурному методу определения тангенциального ограничения для векторного потенциала A , когда на границе задана нормальная составляющая плотности магнитного потока B .

Плотность магнитного потока i действительная

Это ключевое слово используется для указания компонентов плотности магнитного потока B относительно глобальных декартовых осей координат.

Плотность магнитного потока {n} Действительная

Это ключевое слово может быть использовано для непосредственного указания нормальной составляющей B_n плотности магнитного потока.

Ключевые слова для WhitneyAVHarmonicSolver

Далее перечислены дополнительные ключевые слова, связанные с решением гармонической версии. Обычно они используются для задания дополнительных значений, которые определяют мнимые части значений параметров. Соответствующие действительные части затем задаются с помощью команд ключевых слов, уже описанных выше.

Решатель решателя идентификатор**Строка уравнения WhitneyHarmonicSolver** Это дает описательное

имя для дискретной модели, обрабатываемой здесь. Имя может быть изменено, если оно используется последовательно.

Файл процедуры "Magnetodynamics" "WhitneyAVHarmonicSolver"

Объявляется имя подпрограммы решателя.

Переменная строка P[Pot re:1 Pot im:1]

Имя переменной может быть выбрано произвольно при условии, что оно будет последовательно использоваться и в других местах.

Соответствующее число степеней свободы всегда равно двум. Здесь действительная и мнимая части названы так, чтобы их было легко распознать.

Угловая частота действительная

Указана угловая частота $\omega = 2\pi f$ в гармоническом анзаце.

Материал коврика ID

Reluctivity Im Real Reluctivity $\nu =$

$1/\mu$ может быть указана как комплексная величина с мнимой частью, заданной с помощью этого ключевого слова. Значение массива также может быть задано для моделирования магнитной анизотропии.

Электропроводность Im Real

Значение этого ключевого слова может быть использовано для указания мнимой части параметра проводимости. Если материал анизотропен, электропроводность также может быть определена как тензорная функция, задавая ее компоненты относительно глобальных координатных линий.

Body Force bf идентификатор

Для указания мнимых частей источников объема используются следующие ключевые слова:

Плотность тока Im i Real

Намагничивание Im i Real

Граничное условие bc id

Следующие ключевые слова относятся к заданию мнимых частей в сочетании с определением граничных условий:

Сила магнитного поля Im i Real

Плотность электрического тока Im Real

Коэффициент магнитного переноса Im Real

Коэффициент электрической передачи Im Real

Плотность магнитного потока Im i Real

Плотность магнитного потока Im {n} Действительная

Для задания граничного условия (18.62) можно использовать следующие ключевые слова:

Слой Электропроводность Реальный

Это ключевое слово определяет электропроводность материала поверхности.

Относительная проницаемость слоя Реальная

Проницаемость μ поверхностного проводника определяется через значение этого ключевого слова и проницаемость вакуума.

Ключевые слова для MagnetodynamicsCalcFields

Наконец, может быть вызван дополнительный решатель для вычисления производных полей.

Решатель решателя идентификатор

Поля для вычисления выбираются в разделе решателя. Поле Магнитная плотность потока вычисляется всегда, другие по запросу. Размер векторного поля равен 3, а тензорного поля — 6. Для гармонического решения размеры удваиваются, поскольку присутствуют также мнимые компоненты.

Строка уравнения CalcFields Дано

описательное имя для решателя. Его можно изменить, если оно используется последовательно.

Файл процедуры "MagnetoDynamics" "MagnetoDynamicsCalcFields"

Приводится имя подпрограммы решателя.

Строка потенциальной переменной Это

ключевое слово используется для указания имени базовой потенциальной переменной, например AV. Для краевых элементов флаги «Использовать преобразование Пиолы» и «Квадратичное приближение» наследуются от решателя, владеющего этой переменной.

Угловая частота действительная

В этой связи также необходимо указать угловую частоту, поскольку это необходимо для некоторых полей постобработки.

Рассчитать напряженность магнитного поля Логический

Если задано значение True, вычисляется векторное поле напряженности магнитного поля.

Рассчитать электрическое поле Логика

Если задано значение True, вычисляется векторное поле Electric Field.

Расчет плотности тока Логический Если задано значение

True, вычисляется векторное поле плотности тока.

Наложение силы тела Текущий Логический

Если задано значение True, то к значению выше добавляется плотность тока объемной силы, заданная ключевым словом Current Density i.

Расчет узловых сил Логический

Это ключевое слово может быть использовано для активации вычисления узловых сил для дальнейшего механического анализа. Узловые силы вычисляются путем вычисления противоположной производной параметра магнитной энергии, при этом размещение тела описывается в терминах однопараметрического семейства деформаций $x(x, \lambda) = x + \lambda u$. Здесь u — единичный вектор вдоль глобальной оси координат, а λ — базисная функция Лагранжа, связанная с узлом сетки x_k . Затем компоненты узловых сил получаются как

$$F_k = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial B} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_k} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \right) d\Omega$$

Рассчитать напряжение Максвелла Логический

Если задано True, вычисляется тензорное поле Maxwell Stress. Это вычисление предполагает, что относительность (и проницаемость) является действительным параметром.

Рассчитать логические потери гармоник

Если задано значение True, вычисляются скалярные поля Harmonic Loss Linear и Harmonic Loss Quadratic. Подробнее см. в Главе 26.

Рассчитать джоулевое тепло логически

Если задано значение True, вычисляется скалярное поле Джоулева нагрева.

Рассчитать узловой логический нагрев

Если задано True, вычисляется скалярное поле Nodal Joule Heating. В системе СИ результирующей единицей является Ватт. Узловой нагрев легко напрямую связать как узловой источник тепла с уравнением теплопроводности, предполагая согласованные сетки для обоих уравнений.

Рассчитать узловые поля Логика

Если установлено значение False, то не вычислять узловые поля вообще. Значение по умолчанию True.

Вычислить элементарные поля Логический Если

установлено значение False, элементарные поля вообще не вычисляются. Значение по умолчанию True. Элементарные поля хороши тем, что они могут представлять разрывы в сетках.

Если будут вычисляться гармонические потери, то должны быть предоставлены следующие параметры материала. Обратите внимание, что это не параметры, необходимые для первичного решателя, поскольку оценка потерь — это всего лишь функция постобработки. Подробнее см. в Главе 26.

Материал идентификатор материала

Коэффициент линейной потери гармоник Действительный

Это ключевое слово используется для определения материального параметра C в (26.6) для потерь, линейных с частотой. Обратите внимание, что коэффициент может быть функцией самой частоты.

Коэффициент квадратичных гармонических потерь Действительный

Как и предыдущее ключевое слово, за исключением определения материального параметра C для квадратичных членов потерь.

Компонент идентификатор компонента

Рассчитать магнитную силу Логический

Сосредоточенная магнитная сила, действующая на главные тела текущего компонента, будет рассчитана, если это установлено как true. Если элементарные поля доступны, то силы воздушного зазора также сосредоточены.

Логический расчет магнитного момента

Общий крутящий момент, связанный с главными телами текущего компонента, будет рассчитан, если это установлено как true. Если доступны элементарные поля, то также включается крутящий момент, возникающий из-за сил воздушного зазора.

Master Bodies Integer Определяет

целочисленные идентификаторы тел, составляющих компонент.

Главные границы Целое число Идентификаторы

разделов граничных условий также могут использоваться для создания компонента.

Torque Origin(3) Real Это ключевое слово

используется для определения точки в пространстве, с которой пересекается ось крутящего момента.

Ось крутящего момента(3) Действительная

Это ключевое слово используется для определения оси, относительно которой рассчитывается крутящий момент.

Помимо вычисления поля решатель всегда вычисляет и сохраняет в списке значений раздела «Моделирование» две скалярные величины: мощность вихревых токов и энергия магнитного поля.

Первый вариант актуален только для случаев, зависящих от времени, и гармонических случаев.

Библиография

[1] Христов С.И. О безразличной к рамкам формулировке модели Максвелла-Каттанео для тепловых процессов с конечной скоростью. проводимость. *Mechanics Research Communications*, 36(4):481–486, 2009.

[2] Джеррольд Э. Марсден и Томас Дж. Р. Хьюз. Математические основы теории упругости. Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1994.

Модель 19

Решатель схем и динамики

Имя модуля: CircuitsAndDynamics

Подпрограммы модуля: CircuitsAndDynamics, CircuitsAndDynamicsHarmonic, CircuitsOutput

Авторы модуля: Ээлис Такала, Юха Руоколайнен

Авторы документа: Ээлис Такала

19.1 Введение

Может возникнуть необходимость подключить магнитоквазистатическую модель к уравнениям цепи при моделировании электрических устройств, которые управляются цепями. Даже если такая модель теоретически может быть обработана без введения цепей, она может значительно упростить настройку модели. В Elmer уравнения цепи добавляются в системную матрицу решателя магнитодинамики, и, таким образом, они решаются в сильно связанной манере вместе с уравнениями конечных элементов. Следует отметить, что добавление уравнений цепи может затруднить параллельную работу решателя. В случае, если это является критической проблемой для пользователя, следует обратить внимание на настройку модели [9] (например, с помощью так называемой сокращенной поддержки, которая может принести большую пользу [8]). Здесь представлен модуль для добавления уравнений цепи в системную матрицу решателей магнитоквазистатики. Обратите внимание, что этот решатель может (и должен) использоваться вместе с модулями MagnetoDynamics или MagnetoDynamics2D.

При использовании модуля CircuitsAndDynamics в опубликованной академической работе см. [9].

Для достижения лучшей параллельной масштабируемости используется сокращенная поддержка, см. [8].

19.2 Теория

В Элмере магнитодинамические проблемы в настоящее время решаются с использованием так называемой ав-формулировки. Это можно сделать в 2D или 3D и со всеми типами моделирования (т. е. стационарной, гармонической или переходной). ав-формулировка [7, стр. 124] может быть представлена следующим образом: найти $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ такие, что

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v} \times \mathbf{a} - \nabla \mathbf{a} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t} \, d\Omega + (\sigma \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{t}) \, d\Omega + (\sigma \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_h} (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{a}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{a}) \, d\Gamma = 0 \quad \text{а} \quad (19.1)$$

и

$$(\sigma \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega + (\sigma \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, \mathbf{v}) \, d\Gamma = 0 \quad \mathbf{v} \in W_0 \quad (19.2)$$

где $\mathbf{v} = \mu$ — удельная магнитная индукция, $\mathbf{a}$ — векторный магнитный потенциал, $\mathbf{v}$ — скалярный электрический потенциал, $\mathbf{j}_0$ — плотность тока источника, $\mathbf{n}$ — нормальный вектор к границе Γ_h , а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ — тестовые функции. Область Ω — рассматриваемое тело, Ω_c — Ω состоит из проводящего материала, а Γ_h и Γ_c — границы, на которые наложены магнитное поле и поле плотности тока соответственно. Дискретизация конечных элементов края [7, с. 93] генерирует аппроксимации функций векторного магнитного потенциала $\mathbf{a}$ и скалярного электрического потенциала $\mathbf{v}$ в дискретных версиях W_1 и W_0 . Таким образом, эта формулировка требует системной матрицы с двумя типами неизвестных для выражения магнитного векторного потенциала и электрического потенциала. Для получения дополнительной информации о формулировке в Elmer см. модули MagnetoDynamics или MagnetoDynamics2D.

19.2.1 Уравнения цепей и компонентов

Уравнения цепи описываются как общее уравнение

$$Ax' + Bx = f \quad (19.3)$$

где x — вектор переменных контура, A и B — матрицы коэффициентов, а f — вектор силы. В Elmer это уравнение можно описать во входном файле решателя (SIF) на языке MATC.

Уравнения цепи можно разделить на две категории: 1) уравнения компонентов, которые определяют поведение компонента, и 2) уравнения цепи, которые определяют взаимосвязь между компонентами (законы Кирхгофа I и II).

Уравнения компонентов далее делятся на две подкатегории: 1) уравнения элементов цепи, которые могут использоваться для определения идеальных компонентов (например, закон Ома), и 2) уравнения компонентов FE, которые связаны с уравнениями конечных элементов (относящимися к конечным элементам, которые принадлежат соответствующим компонентам). В ходе разработки модуля CircuitsAndDynamics был добавлен новый раздел ключевых слов, называемый «Компонент». В этом разделе пользователь может управлять уравнением компонента, указывая, какие тела принадлежат компоненту и какую формулировку следует использовать с ним, вместе с конкретными входными данными формулировки компонента (например, числом витков).

Уравнения цепей также делятся на две категории: 1) закон Кирхгофа I, который является законом сохранения тока (каждый узел в сетевом графике должен сохранять ток), и 2) закон Кирхгофа II, который является законом сохранения энергии (разность потенциалов в каждом контуре в сетевом графике должна быть равна нулю).

В Elmer уравнения цепи технически делятся на две категории: 1) автоматически записанные уравнения и 2) вручную записанные уравнения. Это связано с тем, что удобно писать уравнения компонентов FE автоматически, как только формулировка и ее конкретные данные известны, в то время как остальные уравнения можно написать вручную без каких-либо затруднений. Обратите внимание, что идеальные компоненты также могут быть автоматизированы (например, модель резистора); однако таких компонентов в настоящее время не существует, и пользователю необходимо писать эти уравнения вручную.

В следующих разделах представлены три поддерживаемые формулировки компонентов (массивные, многожильные и фольгированные). Тип формулировки можно выбрать в SIF с помощью ключевого слова «Тип катушки» в разделе «Компонент».

19.2.2 Массивная катушка

В некоторых случаях, когда обмотка состоит всего из нескольких витков, может быть использована так называемая модель массивного индуктора [2]. Тогда формулировка av принимает следующий вид: для всех индексов массивного индуктора j_m (в одном вычислении может существовать несколько экземпляров)

$$(\nabla \times a, \nabla \times a) \Omega + (\sigma \nabla a, \nabla a) \Omega_m + \sum_{i \in \Gamma_m} V_j m (\sigma \nabla \cdot a, a) \Omega_m = 0 \quad (19.4)$$

и

$$(\sigma \nabla a, \nabla a) \Omega_m + \sum_{i \in \Gamma_m} V_j m (\sigma \nabla \cdot a, a) \Omega_m = I_j m, \quad (19.5)$$

где Ω_m — массивный домен индуктора, Γ_m — список узлов на границах электродов, $V_j m$ — напряжение, а $I_j m$ — полный ток через электроды.

Электрический потенциал источника v можно предварительно вычислить с помощью электрокинетической формулировки (уравнение Пуассона), установив его равным 1 на положительной границе электрода и 0 на отрицательной границе. Если электрокинетический решатель не выполняется, то используется уменьшенная поддержка.

19.2.3 Многожильная катушка

В случае катушки с проводом малого диаметра, который плотно упакован, можно использовать многожильную модель. Основная линия моделей имеет вид [3]: для всех многожильн

$$(\nabla \times a, \nabla \times a) \Omega + I_j s (j_s, j_s, a) \Omega_s = 0 \quad (19.6)$$

и

$$(\mathbf{t}_a, \mathbf{j}_s, \mathbf{j}_s) \Omega_s + I_j s (\sigma, \text{ где } I_j s = \frac{1}{j_s, j_s}, j_s, j_s) \Omega_s = V_j s, \quad (19.7)$$

полный ток в катушке, а $V_j s$ — напряжение в катушке. Это предпочтительный метод определения уравнения компонента для так называемой классической модели многожильного индуктора [7, стр. 286], но сопротивление катушки также может быть задано явно [6, 5]. Классическая модель дает

$$\mathbf{t}_a \cdot \mathbf{w} d\Omega_s + R I_j s = V_j s, \quad (19.8)$$

Как

где $\mathbf{w}$ — вектор плотности провода, а R — сопротивление катушки.

19.2.4 Модель намотки фольги

В случае фольговой обмотки с малой толщиной слоя, которая плотно упакована, можно использовать модель фольговой обмотки, которая имеет следующий вид [4, 1]: для всех индексов фольговой обмотки j_f

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{a}, \mathbf{v} \times \mathbf{a}) \Omega + (\sigma \mathbf{t}_a, \mathbf{a}) \Omega_f + (\sigma V_{j_f}(\alpha) \mathbf{v} \in \Gamma_f \quad \mathbf{a}) \Omega_f = 0 \quad (19.9)$$

и

$$(\sigma \mathbf{t}_a, \mathbf{V}(\alpha) \mathbf{s} \quad \mathbf{a}) \Omega_f + (\sigma V_{j_f}(\alpha) \mathbf{v} \quad \mathbf{a}, \mathbf{V}(\alpha) \mathbf{v}) \Omega_f = \frac{\text{Видеть}}{\text{Ссылка}} \int_{\Gamma_f} \mathbf{V}(\alpha) d\alpha, \quad \Omega \alpha, \quad (19.10)$$

где Ω_f — область обмотки фольгой, Γ_f — список узлов на границах электродов, V_{j_f} — напряжение, а I_{j_f} — полный ток через электроды.

19.3 Ключевые слова

Решатель цепей и динамики добавляет уравнения цепи в системную матрицу решателя WhitneySolver или MagnetoDynamics2D. Ключевые слова необходимы для обоих этих решателей.

19.3.1 Решатель CircuitsAndDynamics

Решатель решателя идентификатор

Уравнение строковых схем

Файл процедуры "CircuitsAndDynamics" "CircuitsAndDynamics"

Процедура, включающая добавление уравнений цепи в линейную систему решателей MagnetoDynamics и MagnetoDynamics2D.

Нет Матрица Логическая Истина

Этот решатель не имеет собственной матрицы. Он работает только с матрицами решателей магнитодинамики.

Компонент идентификатор компонента

Главные тела Целочисленные идентификаторы

тел Идентификаторы тел, составляющих компонент схемы.

Тип катушки Тип струны

Если компонент цепи определен как катушка, то ее можно рассматривать как «многожильную», «массивную» или «фольгированную обмотку».

Сопротивление Реальное сопротивление

Если тип катушки определен как многожильный, то сопротивление катушки может быть явно определено с помощью этого ключевого слова. В случае, если это ключевое слово не указано, сопротивление вычисляется с использованием электропроводности связанных материалов тела.

Площадь электрода Реальная площадь

Если тип катушки многожильный и сопротивление явно не указано, то это ключевое слово может быть указано для указания площади вывода катушки. Затем это используется для вычисления параметра сопротивления катушки. Обратите внимание, что если не указано ни сопротивление, ни площадь электрода, то площадь вывода вычисляется автоматически. Однако на данный момент эта функция еще не работает в 3D.

Сила тела 1

Имя источника Реальное значение

Определения схем могут использоваться для присвоения свободно выбранного имени источнику, связанному с компонентом схемы. Например, если используется имя "Source Name", эта команда может затем использоваться для указания источника (функции).

19.3.2 Вывод CircuitsAndDynamics

Этот решатель сохраняет результаты всех переменных, которые принадлежат решателю CircuitsAndDynamics, а именно токи и напряжения компонентов (а также те переменные, которые определены пользователем). Затем их можно сохранить в текстовый файл с помощью решателя SaveData.

Моделирование

Максимальный выходной уровень Целочисленный уровень

Это определяет, что отображается в стандартном выводе. Уровень 3 показывает некоторую информацию о том, что происходит во время выполнения, уровень 8 показывает результаты переменных компонентов, а уровень 10 показывает все результаты переменных контура. Все эти переменные сохраняются, даже если они не отображаются в стандартном выводе. Сохраненные переменные можно сохранить с помощью процедуры SaveData.

Решатель решателя идентификатор

Уравнение Строка Схемы Выход

Файл процедуры "CircuitsAndDynamics" "CircuitsOutput"

Процедура, которая выводит результаты сложных цепей (токи, напряжения, сопротивления и т. д.).

19.3.3 Дополнительные ключевые слова для решателя MagnetoDynamics или MagnetoDynamics2D

Решатель решателя идентификатор

Уравнение строки WhitneySolver

Файл процедуры "MagnetoDynamics" "WhitneyAVSolver"

Это WhitneySolver, к системной матрице которого добавляются уравнения цепи. Эта процедура также может быть MagnetoDynamics2D.

Экспорт множителя Лагранжа. Логическое значение True. Это

необходимо решателям магнитной динамики при добавлении уравнений цепи.

19.3.4 Определения схем

Определения схем записаны в MATC.

\$ nof_circuits = 1 \$ nof_variables

= 6

\$ Схемы = nof_circuits

\$!---- Схема 1 ---- \$! Определение

количества переменных и инициализация матриц схемы

```

$ C.1.переменные = nof_переменных $ C.1.A =
нули(nof_переменных, nof_переменных)
$ C.1.B = нули(nof_variables, nof_variables)
$ C.1.Mre = нули(nof_variables, nof_variables)
$ C.1.Mim = нули(nof_variables, nof_variables)
$ C.1.perm = нули(nof_variables)

$ !Определение переменных $
C.1.name.1 = "var1"
$ C.1.name.2 = "var2"

$ ! Определение переменных компонента $
C.1.name.3 = "i_component(1)"
$ C.1.name.4 = "v_component(1)"
$ C.1.name.5 = "i_component(2)"
$ C.1.name.6 = "v_component(2)"
! Число в скобках относится к ! идентификатору компонента,
определенному в sif.

$ ! Определить источники: $
C.1.B(0,0) = 1 $ C.1.source.1
= "Имя источника"

```

Библиография

- [1] Патрик Дюлар и Кристоф Жозэн. Пространственно зависимые глобальные величины, связанные с формулировками 2-мерного и 3-мерного магнитного векторного потенциала для моделирования обмотки фольги. IEEE trans. magn., 38(2):633–636, март 2002 г.
- [2] Патрик Дюлар, Ф. Хенротт и В. Легро. Общий и естественный метод определения соотношений цепей, связанных с формулировками магнитного векторного потенциала. IEEE trans. magn., 35(3):1630–1633, май 1999 г.
- [3] Патрик Дулар, Нельсон Садовски, ЖРА Бастос и Вилли Легро. Двойные полные процедуры для учета многожильных индукторов в формулировках магнитного векторного потенциала. IEEE trans. magn., 36(4):1600–1605, июль 2000 г.
- [4] HD Gersem и K. Hameyer. Конечно-элементная модель для моделирования намотки фольги. IEEE trans. magn., 37(5):3427–3432, сентябрь 2001 г.
- [5] G. Golovanov, Y. Marechal и G. Meunier. Формулировка на основе 3D-элементов, связанная с электрическими цепями. IEEE trans. magn., 34(5):3162–3165, сентябрь 1998 г.
- [6] П. Дж. Леонард и Д. Роджер. Катушки, наведенные напряжением, для трехмерной электромагнитной модели методом конечных элементов. IEEE trans. magn., 24(5):2579–2581, сентябрь 1988 г.
- [7] Жерар Менье, редактор. Метод конечных элементов для электромагнитного моделирования. iSTE и Wiley, 2008.
- [8] Элис Такала, Эврен Юртесен, Ян Вестерхольм, Юха Руоколайнен и Томми Пеусса. Использование сокращенной поддержки для повышения параллельной сильной масштабируемости в трехмерных конечноэлементных формулировках векторного магнитного потенциала с уравнениями цепей. Электромагнетизм, 36(6):400–408, август 2016 г.
- [9] Элис Такала, Эврен Юртесен, Ян Вестерхольм, Юха Руоколайнен и Питер Рабак. Параллельное моделирование индуктивных компонентов с помощью программного обеспечения Elmer для конечных элементов в кластерных средах. Электромагнетизм, 36(3):167–185, апрель 2016 г.

Модель 20

Векторный Гельмгольц для электромагнитных Волны

Имя модуля: VectorHelmholtz

Подпрограммы модуля: VectorHelmholtzSolver, VectorHelmholtzCalcFields

Авторы модуля: Юхани Катая, Юха Руоколайнен и Мика Малинен.

Авторы документа: Юхани Катая, Роман Шевчик и Мика Малинен

20.1 Введение

Этот модуль предназначен для решения гармонических по времени уравнений Максвелла в высокочастотном режиме, так что уравнение rot-rot является действительным. В качестве альтернативного метода электрическое поле может быть разложено с использованием представления AV. Тогда закон Гаусса служит дополнительным уравнением для определения. Для учета всех уравнений Максвелла при выводе, эта версия обеспечивает большую гибкость при задании граничных условий.

20.2 Теория

Гармонические во времени уравнения Максвелла (в случае временного фактора $e^{i\omega t}$, $\omega = 2\pi f$) дают

$$\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}, \quad (20.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (20.2)$$

где комплексные скаляры $\mu = \mu_0 \mu_r$ и $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ — параметры проницаемости и диэлектрической проницаемости модели, а $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{J}$ — электрическое поле, напряженность магнитного поля и распределение приложенного тока соответственно. Величины μ_0 , ϵ_0 — проницаемость и диэлектрическая проницаемость вакуума, а μ_r и ϵ_r — относительная проницаемость и диэлектрическая проницаемость.

Исключение $\mathbf{H}$ из уравнений (20.1) и (20.2) дает

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{J} \quad (20.3)$$

над вычислительной областью Ω . Граничные условия Дирихле и Робина для (20.3) имеют вид

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{f} \times \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_E, \quad (20.4)$$

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{E} - \alpha \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \mathbf{n} \times \mathbf{g} \times \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_Z, \quad (20.5)$$

где подмножества Γ_E и Γ_Z покрывают границу $\partial\Omega$ области Ω , т. е. $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_Z$. Обратите внимание, что граничное условие Неймана достигается путем установки $\alpha = 0$.

Вариационная форма (20.3) имеет следующий вид:

Найдите $E = Hf, E(\text{rot}, \Omega)$ такой, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mu^{-1} \text{curl} E \cdot \text{curl} v - \epsilon E \cdot v) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma} \mu^{-1} (E \times n) \cdot (v \times n) dS \\ & = \int_{\Gamma} \mu^{-1} (r \times n) \cdot (v \times n) dS + \int_{\Omega} i\omega J \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} H_0 E(\text{curl}, \Omega). \end{aligned} \quad (20,6)$$

Здесь v является комплексно сопряженным числом v .

20.2.1 Модели граничных условий

Граница импеданса Леонтовича. Граничное условие Робина (20.5) можно использовать для аппроксимации граничного эффекта хорошо проводящей среды, выбрав

$$\alpha = i\omega \mu Z_p \quad \text{и} \quad g = 0, \quad (20,7)$$

где Z_p — поверхностное сопротивление. Например, Z_p можно задать как

$$Z_p = (1 - i) \frac{\overline{MKO}}{2\sigma c}, \quad (20,8)$$

где σ и μ — объемная проводимость и проницаемость стенки [1].

Граничное условие поглощения первого порядка. Теперь пусть вычислительная область Ω будет $BR \setminus D$, где BR — открытый шар радиуса R и $D \subset BR$. Кроме того, предположим, что $\Gamma E \subset \Gamma Z$ покрывает только D , в то время как граничное условие поглощения первого порядка на BR задается как [2]

$$n \times \text{rot} E = i\omega \epsilon_0 \mu_0 n \times \overline{(n \times E)}. \quad (20,9)$$

Это можно восстановить с помощью границы Робина на BR , с

$$\alpha = i\omega \epsilon_0 \mu_0 \quad \text{и} \quad g = 0. \quad (20,10)$$

Port feed. Предположим, что направленная волна E_p распространяется с постоянной скоростью β . Кроме того, предположим, что E_p является единственной распространяющейся модой на выбранной частоте. Модель port feed может быть реализована с граничным условием Робина путем выбора

$$\alpha = i\beta \quad \text{и} \quad g = 2i\beta E_p. \quad (20,11)$$

Поверхностный потенциал. Дифференциал скалярного потенциала ϕ , определенный на границе, может быть использован для генерации g как

$$g = (-\alpha \phi) a \quad (20,12)$$

где a — двойственный базис координатных базисных векторов a_i на поверхности, так что

$$\int_{\Gamma} \mu^{-1} (r \times n) \cdot (v \times n) dS = \int_{\Gamma} \mu^{-1} ((-\alpha \phi) a \times n) \cdot (v \times n) dS.$$

20.3 Формулировки, включающие дополнительную скалярную переменную

Полный набор гармонических во времени уравнений Максвелла задается выражением

$$\text{curl}(\mu^{-1} B) = i\omega \epsilon E + J, \quad \text{div}(\epsilon E) = \rho, \quad (20,13)$$

$$\text{рот} E = \rho, \quad (20,14)$$

$$i\omega B, \quad \text{div} B = 0, \quad (20,15)$$

$$(20,16)$$

где $B = \mu H$ и ρ — плотность заряда. С математической точки зрения уравнения (20.15) и (20.16) можно считать ограничениями, которые ограничивают возможные формы полей E и B . Если мы решим записать

$$B = \text{rot} A, \quad i\omega$$
(20.17)

мы получаем разложение

$$E = A - B$$
(20.18)

для того, чтобы удовлетворить ограничениям (20.15) и (20.16). Отметим, что переменные стандартной формулировки AV могут быть получены из заданного разложения (20.18) путем переопределения $A := 1/(i\omega)A$.

Исключение B из (20.13) снова дает (20.3), поэтому теперь мы можем подставить (20.18) в (20.3), чтобы получить

$$\text{локон } \mu \quad \text{локон } A \quad \omega \quad \epsilon A + \omega \quad 2 \epsilon \quad V = i\omega J.$$
(20.19)

Кроме того, закон Гаусса (20.14) служит способом определения V , давая

$$\text{div}(\epsilon A - \epsilon V) = \rho.$$
(20.20)

Отмечено, что (20.19) и (20.20) подразумевают версию закона сохранения заряда

$$\rho + i\omega \text{div} J = 0.$$
(20.21)

На практике обычно можно принять $\rho = 0$. Следовательно, подаваемый ток должен быть безрасходным.

Теперь главное отличие по сравнению с простой формулировкой в терминах E заключается в том, что включение закона Гаусса позволяет нам задать граничные условия в нормальном направлении границы. Это дополнительное граничное условие включает в себя поверхностную плотность заряда q на границе. Основное ограничение, которое можно вывести из закона Гаусса, применяя теорему о дивергенции, гласит, что скачок тока смещения $D = \epsilon E$ дает поверхностную плотность заряда на границе, т. е.

$$[D] \cdot n = q,$$
(20.22)

где $[D] = D + D_0$ дает разницу его аргументного поля на интерфейсе, при этом D_0 предполагается полем вне рассматриваемого тела, а n — внешней нормалью. Аналогично, мы можем применить теорему о дивергенции, начиная с (20.13), чтобы получить условие интерфейса

$$[J] \cdot n = i\omega[D] \cdot n = i\omega q,$$
(20.23)

где второе равенство следует из (20.22). Если мы, наконец, предположим, что

$$i\omega q = \frac{V - V_0}{Z_0},$$
(20.24)

мы можем выразить граничное условие для закона Гаусса через напряжение источника V_0 и импеданс Z_0 источника напряжения как

$$[D] \cdot n = \frac{B - V_0}{i\omega Z_0}.$$
(20.25)

Отметим, что в пределе при $Z_0 \rightarrow 0$ выполняется условие Дирихле $V = V_0$, тогда как $[D] \cdot n = 0$ получается в пределе при $Z_0 \rightarrow \infty$.

Вариационную форму можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \text{Найти } A = H_0 A(\text{rot}, \Omega) \text{ и } V = H_1 \quad v, D \text{ такой, что} \\ & \int_{\Omega} [\mu \quad \text{завиток } A \cdot \text{завиток } v \quad 2 - \epsilon(A - V) \cdot v] d\Omega - i\omega \int_{\Gamma} (K \times n) \cdot (v \times n) dS \\ & = \int_{\Omega} i\omega J \cdot v \quad d\Omega - i\omega \int_{\Gamma} H_0 \cdot (v \times n) dS - \int_{\Omega} H_0 A(\text{curl}, \Omega), \\ & 2 - \epsilon(A - V) \cdot w \quad \text{ДОМ} + \int_{\Gamma} [D] \cdot n \quad \text{ДС} \\ & = \int_{\Omega} \omega^2 D_0 \cdot n w \quad \Gamma q \quad \text{ДС} \quad 2 - \rho w \quad d\Omega - \int_{\Omega} H_1 \quad 0, D. \end{aligned}$$
(20.26)

Здесь K — поверхностный ток, который связан со скачком тангенциального следа H как

$$K = n \times [H] = n \times (H + H_0). \quad (20.27)$$

Если поверхностный импеданс Z_p задан (ср. (20.7)), мы можем использовать соотношения

$$K \times n = \frac{1}{3\pi} E \times n + H_0 = \frac{1}{3\pi} (A - V) \times n + H_0 \quad (20.28)$$

для того, чтобы заменить граничные члены в первом равенстве (20.26) выражением, заданным через A и V .

Обобщенную версию, аналогичную (20.5), можно также записать в виде

$$i\omega K \times n = \alpha \mu_0 E \times n - i\omega H_0 + \mu_0 \nabla \times n. \quad (20.29)$$

Дополнительное условие для выражения закона сохранения поверхностного заряда на границе Γ_Z , где ω — пробная функция поверхностный ток задан, можно вывести из (20.26). Для этого пусть $w \in H^1$, связанный с ω , д границей Γ_Z . Кроме того, вариационная форма (20.26) позволяет нам выбрать $v = w$ при условии, что A не ограничено равенством нулю на Γ_Z , так что, взяв линейную комбинацию двух вариационных уравнений в (20.26), применяя закон сохранения заряда (20.21) и предполагая, что поверхностная плотность заряда на Γ_Z определяется соотношением (20.25), мы получаем

$$\begin{aligned} i\omega \int_{\Gamma_Z} (K \times n) \cdot (w \times n) dS &= i\omega \int_{\Gamma_Z} \frac{V - V_0}{20} dC \\ &= i\omega \int_{\Gamma_Z} (J \cdot n) w dS - i\omega \int_{\Gamma_Z} H_0 \cdot (w \times n) dS. \end{aligned} \quad (20.30)$$

Уравнение (20.30) является прямым следствием (20.26) и в принципе выражает только информацию, которая уже присутствует в (20.26). На практике дополнительная сборка уравнения (20.30) тем не менее оказалась полезной для итеративного решения дискретных уравнений.

Один из способов задать поверхностное сопротивление Z_p — указать параметр α , как в (20.7). Другой вариант — установить

$$K \times n = \sigma_L \delta (E \times n) \quad (20.31)$$

задавая комплексный параметр проводимости σ_L и толщину слоя δ . Отметим, что вариационная форма (20.26) не дает прямого способа задать тангенциальный след E . Подходящие одновременные условия Дирихле для $A \times n$ и V могут быть использованы для обеспечения этого ограничения, но мы отмечаем, что $Z_p = 0$ обеспечивает $E \times n = 0$ как предельное условие, тогда как $Z_p \rightarrow \infty$ приводит к предельному условию $n \times [H] = 0$.

С другой стороны, ограничение $A \times n = 0$ дает возможность установить $V \cdot n = 0$ на границе. Тогда мы имеем $E \times n = V \times n$, что является ожидаемым условием для волн TEM. Для полного описания случая волн TEM также необходимо однородное граничное условие Неймана для закона Гаусса.

Следует отметить, что уравнения (20.19) и (20.20) без дополнительного ограничения для части A не делают разложение (20.18) уникальным. Поэтому только E тогда имеет уникальную интерпретацию.

20.4 Ключевые слова

Константы

Ключевые слова этого раздела используются для изменения значений натуральных констант.

Диэлектрическая проницаемость вакуума **Реальная**

Диэлектрическая проницаемость вакуума ϵ_0 , по умолчанию равна $8,854187817 \cdot 10^{-12} \frac{Кл^2}{Вс}$.

Проницаемость Вакуума **Реальная**

Проницаемость вакуума μ_0 , по умолчанию равна $4\pi \cdot 10^{-7} Вс \frac{Кл^2}{А^2}$.

Материал идентификатор **материала**

Параметры материала ϵ и μ ϵ^{-1} определены в этом разделе.

Относительная диэлектрическая проницаемость действительная

Действительная часть относительной диэлектрической проницаемости ϵ_r .

Относительная диэлектрическая проницаемость im Real

Мнимая часть относительной диэлектрической проницаемости ϵ_r .

Относительная Реальность Реальная

Действительная часть μ_r^{-1} .

Относительная Реальность в Реале

Мнимая часть μ_r^{-1} .

Электропроводность Действительная Если

задана электропроводность σ , то J заменяется на $J = \sigma E + J_0$, где часть J_0 теперь представляет собой плотность приложенного тока.

Электропроводность Im Действительная Мнимая

часть σ .

Ключевые слова для VectorHelmholtzSolver

Solver resolver id Раздел Solver

определяет переменные управления для решателя уравнений. Большинство возможных ключевых слов, например, связанных с линейной алгеброй (начиная с Linear System), являются общими для всех решателей и объясняются в другом месте.

Equation String Строка,

идентифицирующая решатель. Это можно изменить, но это должно быть указано; например VectorHelmholtzSolver

Файл процедуры "VectorHelmholtz" "VectorHelmholtzSolver"

Имя подпрограммы решателя.

Переменная Строка

Идентификатор переменной поля, которую необходимо решить. Необходимо указать действительную и мнимую части, см. значение по умолчанию $E[\text{re}:1 \text{ E im}:1]$ или $AV[AV \text{ re}:1 AV \text{ im}:1]$ (когда также используется закон Гаусса (20.20)).

Угловая частота Действительная Угловая

частота ω .

Использовать логическое преобразование Пиолы

Использовать современные конечные элементы Piola, преобразованные по краям. Это увеличивает количество степеней свободы на сетках, содержащих четырехугольные грани элементов. Если сетка содержит элементы, которые не являются аффинными изображениями опорного элемента, то эта опция должна быть включена для поддержания точности.

Квадратичная аппроксимация логическая

Это ключевое слово необходимо, когда моделирование выполняется с использованием краевых конечных элементов второй степени.

Использовать закон Гаусса Логика

Это ключевое слово можно использовать для активации использования представления AV, чтобы также применялся закон Гаусса (20.20).

Коэффициент демпфирования линейной системы Предварительное обусловливание

Действительный Если присутствует, предобуславливатель строится из матрицы демпфированной системы $A + k(SM + B)$, где A — исходная общая матрица системы, S — матрица жесткости, содержащая роторные члены, M — масштабированная матрица масс, соответствующая дискретизации матрицы оператора ω , ϵI , B — это возникающая из граничных интегралов, а k — коэффициент демпфирования.

Линейная система Предварительное обусловливание Коэффициент затухания im Real Мнимая

часть коэффициента затухания k .

Массово-пропорциональное демпфирование *Логическое*

Если эта опция активирована, предобуславливатель строится на основе матрицы демпфированной системы A KM , где A и M такие же, как указано выше.

Модели полостей без потерь обычно выигрывают от смещенного предварительного обуславливания с $\kappa = 0$.

Использование BiCGStab(l) с предварительным обуславливателем ILU(0) или Vanka и выбор коэффициента затухания $\kappa = i$, вероятно, приведет к сходящейся итерации. Отмечено, что если используется пропорциональное массе возмущение, то указание $\kappa = |\eta|$ создает то же возмущение, которое возникло бы при введении электропроводности $\sigma = |\eta| \omega \epsilon$.

Объемная сила *bf id*

Приложенный ток J указан в разделе Объемная сила.

Плотность тока *i действительная*

i -я составляющая действительной части плотности тока J .

Плотность тока *im i Real* i -я составляющая

мнимой части плотности тока J .

Граничное условие *bc id***E re {e}** *i Real* Действительная

часть данных компонента f_i для оценки степеней свободы, соответствующих базисным функциям ребер.

E im {e} *i Действительный*

Мнимая часть данных компонента f_i для оценки степеней свободы, соответствующих базисным функциям ребер.

Коэффициент электрического Робина *Реальный*

Действительная часть A .

Коэффициент электрического Робина *im Real*

Мнимая часть α .

Поглощение BC *Логическое*

Это можно использовать для установки α , как определено в (20.10).

Магнитная граничная нагрузка *i Real*

Компонент i действительной части g . Если $\alpha = 0$, то это можно использовать для установки поверхностного тока через

$$i \omega n \times [H] = \mu_0 n \times g \times n, \quad (20.32)$$

так что заданный поверхностный ток K задается путем определения $g = -i \omega \mu_0 K$.

Магнитная граничная нагрузка *i im Real*

i -й компонент мнимой части g .

ТЭМ Потенциал *Реальный*

Это можно использовать для определения действительной части скалярного потенциала ϕ для вычисления g .

Потенциал ТЭМ *реален*

Это можно использовать для определения мнимой части скалярного потенциала ϕ для вычисления g .

Плотность электрического тока *действительная*

Это можно использовать для определения нормальной составляющей плотности тока, чтобы можно было задать граничное условие для закона Гаусса с помощью (20.23). Соглашение о знаках выбрано таким образом, что если мы возьмем $D_0 = 0$ в качестве внешнего поля, то получим

$$i \omega [D] \cdot n = j_n$$

где j_n задается этим ключевым словом. Если ключевое слово Layer Thickness задано в том же разделе граничных условий, это ограничение также может быть задано по одномерной линии трехмерной модели для получения плотности тока на единицу длины.

Плотность электрического тока **Im Real**

Мнимая часть нормальной составляющей плотности тока.

Коэффициент электрической передачи **действительный**

Этот параметр может быть задан для создания граничного условия вида

$$i\omega[D] \cdot n + i\omega D_0 \cdot n = -\beta q V + j n, \quad (20.33)$$

где βq задается этим ключевым словом. Ключевое слово Electric Current Density может быть использовано для создания $j n$. В частности, условие (20.25) может быть задано путем установки $\beta q = 1/Z_0$ и $j n = V_0/Z_0 + i\omega D_0 \cdot n$. Кроме того, если ключевое слово Layer Thickness задано в том же разделе граничных условий, это ограничение также может быть задано по одномерной линии трехмерной модели.

Коэффициент электрической передачи **Im Real**

Мнимая часть βq .

Действительная электропроводность слоя Это определяет

действительную часть σL в (20.31).

Слой Электропроводность **Im Реальный**

Мнимая часть σL .

Толщина слоя **Действительная Это**

определяет значение δ в (20.31).

Хороший проводник **BC Логический Это**

может быть использовано для автоматизации вычисления α , так что (20.8) будет получено. В этом случае ключевое слово Layer Electric Conductivity может быть использовано для получения σ , в то время как ключевое слово Layer Relative Reluctivity должно быть указано для определения (μ_r, c) так что $\mu c = \mu_0/(\mu_r, c)$.

Относительная **Реальность Слоя Действительный**

Относительность материала, ограничивающего тело.

Относительная Реактивность Слоя **Im Real**

Мнимая часть коэффициента редукции, связанная с материалом, ограничивающим тело.

Применить сохранение заряда **Логический**

Это можно использовать для активации сборки дополнительных членов в (20.30). Текущая реализация обрабатывает только первый член левой части (20.30), т. е. предполагается, что остальные члены равны нулю.

Ключевые слова для VectorHelmholtzCalcFields

Решатель решателя идентификатор

Уникальный идентификатор решателя постобработки.

Строка уравнения Строка,

идентифицирующая решатель.

Файл процедуры "VectorHelmholtz" "VectorHelmholtzCalcFields"

Имя подпрограммы постобработки.

Угловая частота **Действительная Угловая**

частота ω .

Расчет элементарных полей **Логический Расчет поэлементных**

постоянных приближений полей. Полезно для разрывных параметров материалов.

Рассчитайте плотность магнитного потока. **Логический вывод:**

плотность магнитного потока $B = i/\omega \text{ rot } E$.

Рассчитать напряженность магнитного поля **Логический**

Выведите напряженность магнитного поля $H = \mu^{-1} B$.

Рассчитать электрическое поле. Логический вывод
электрического поля E .

Вычислить логический вектор Пойнтинга

Вывод вектора Пойнтинга $\frac{1}{2}E \times H$.

Вычислить логическое деление вектора Пойнтинга

Вывести дивергенцию вектора Пойнтинга

$$\frac{1}{2} E \times H = \frac{1}{2} i\omega (\mu H \cdot H + E \cdot (\epsilon E)) \quad \frac{1}{2} \mathcal{E} \cdot \text{Дж}$$

а также сгенерировать результирующую переменную Джоулева нагрева, соответствующую термину $1/2E \cdot$
Дж выше.

Вычислите энергетический функционал. Логическая

оценка левой части (20.6), используя дискретное решение.

Библиография

[1] Дж. Д. Джексон. Классическая электродинамика. John Wiley & Sons, третье издание, 1999.

[2] А. Ф. Петерсон, Поглощающие граничные условия для векторного волнового уравнения, Микроволновая и оптическая
Письма о технологиях, 1(2):62–64, 1988.

Модель 21

Электромагнитные волны

Имя модуля: EMWaveSolver

Подпрограммы модуля: EMWaveSolver, EMWaveCalcFields

Авторы модуля: Юхани Катая, Питер Р. Абэк, Юха Руоколайнен и Мика Малинен

Авторы документа: Мика Малинен

21.1 Введение

Описанный здесь модуль нацелен на решение зависящего от времени уравнения электромагнитной волны, полученного из уравнений Максвелла. Здесь неизвестное поле аппроксимируется с помощью векторных (краевых) конечных элементов.

21.2 Теория

Предполагая, что материальные параметры не зависят от времени, уравнение электромагнитной волны можно записать как

$$\text{локон } \mu^{-1} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \quad (21.1)$$

где $\mu = \mu_0 \mu_r$ и $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ — проницаемость и диэлектрическая проницаемость, $\mathbf{E}$ — электрическое поле и плотность $\mathbf{J}$ приложенного тока. Величины μ_0 и ϵ_0 — проницаемость и диэлектрическая проницаемость вакуума, а μ_r и ϵ_r — относительная проницаемость и относительная диэлектрическая проницаемость соответственно.

Граничные условия Дирихле и Робина для (21.1) имеют вид

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{f} \text{ на } \Gamma_E, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = g \text{ на } \Gamma_Z \quad (21.2)$$

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma_Z, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = \mathbf{f} \text{ на } \Gamma_E \quad (21.3)$$

где Γ_E и Γ_Z дают разбиение границы Ω вычислительной области Ω таким образом, что $\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_Z$. Обратите внимание, что граничное условие Неймана достигается путем установки $\alpha = 0$. Поглощающее граничное условие может быть создано путем выбора

$$\alpha = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \quad (21.4)$$

Для получения вариационной формулировки (21.1) проводится интегрирование по частям. После использования (21.3) имеем затем перейти к слабой форме

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{v} + \epsilon \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) \cdot \nabla \times \mathbf{E} \, d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{E} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_Z} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dS - \int_{\Gamma_E} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dS \end{aligned} \quad (21.5)$$

которые можно использовать для получения полностью дискретных уравнений.

21.3 Ключевые слова

Константы

Ключевые слова этого раздела используются для изменения значений натуральных констант.

Диэлектрическая проницаемость вакуума действительная

Диэлектрическая проницаемость вакуума ϵ_0 по умолчанию равна $8,854187817 \cdot 10^{-12} \left(\frac{\text{C}}{\text{Вм}}\right)$.

Проницаемость Вакуума Реальная

Проницаемость вакуума μ_0 , по умолчанию равна $4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Пропи}}{\text{Ямвосо}}\right)$.

Материал идентификатор материала

В этом разделе определяются параметры материала ϵ_r , μ_r и σ .

Относительная диэлектрическая проницаемость действительная

Это определяет значение относительной диэлектрической проницаемости ϵ_r .

Относительная действительная проницаемость .

Определяет значение μ_r .

Электропроводность Реальная Это определяет значение σ .

Ключевые слова для EMWaveSolver

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения. Это имя

для ссылки на определение решателя.

Файл процедуры «EMWaveSolver» «EMWaveSolver»

Используется для идентификации подпрограммы решателя.

Переменная Строка Имя

переменной поля, которая должна быть решена. Если это не указано, решатель по умолчанию использует это значение E.

Использовать логическое преобразование Пиолы

Использовать современные конечные элементы ребер, преобразованные Пиолой. Это увеличивает количество степеней свободы на сетках, содержащих гексаэдрические и пирамидальные элементы. Если сетка содержит элементы, которые не являются аффинными изображениями опорного элемента, то эту опцию следует включить.

Квадратичная аппроксимация логическая

Это ключевое слово можно использовать для перехода к использованию векторных конечных элементов второго порядка.

Объемная сила bf id

Производную по времени плотности приложенного тока J_E можно задать в разделе Объемная сила.

Текущая плотность тока i Действительная i -я

составляющая поля производной по времени $J'E$.

Граничное условие bc id

E {e} i Real В случае

имени переменной по умолчанию эта команда определяет вектор так, что его тангенциальный след $f \times n$ аппроксимируется $E_h \times n$, где E_h — интерполяционная функция конечных элементов. Значение этого ключевого слова определяет компоненты вектора относительно глобальной декартовой системы координат.

Коэффициент электрического затухания Действительный.

Определяет значение параметра α .

Магнитная граничная нагрузка i Real

Значение этого ключевого слова определяет i -й компонент g .

Ключевые слова для EMWaveCalcFields

Отдельный раздел решателя может быть написан таким образом, чтобы создать постобработанное поле Elfield, которое соответствует вычисленному решению и которое можно использовать для визуализации.

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения. Это имя

для ссылки на определение решателя.

Файл процедуры "EMWaveSolver" "EMWaveCalcFields"

Используется для определения имени подпрограммы постобработки.

Вычислить элементарные поля Логический Вычислить

поэлементную подгонку для первичного решения. Это особенно полезно в случаях, когда параметры материала имеют разрывы.

Модель 22

Расчет магнитных полей в 2D

Название модуля: MagnetoDynamics2D

Подпрограммы модуля: MagnetoDynamics2D, MagnetoDynamics2DHarmonic, BSolver.

Авторы модуля: Юха Руоколайнен, Ээлис Такала, Мика Малинен, Петер Рабак

Авторы документа: Петер Рабак, Мика Малинен

22.1 Введение

Этот модуль может быть использован для решения версии уравнений Максвелла в двумерных особых случаях (включая аксиально-симметричные задачи), когда неизвестной является z-компонента (или ϕ -компонента) векторного потенциала. В отличие от трехмерной версии решателя магнитодинамики, описанной ранее, здесь применяется стандартная интерполяция Лагранжа. Помимо выполнения вычислений во временной области, аналогичная версия уравнений может быть также решена в частотной области. Кроме того, может быть вызван дополнительный решатель для получения производных полей (например, плотности магнитного потока) из вычисленного векторного потенциала. Также могут быть вычислены джоулевы потери для гармонических полей.

22.2 Теория

Когда плотность тока действует в направлении, ортогональном рассматриваемой плоскости, скалярный потенциал не нужно рассматривать как неизвестный в формулировке AV уравнений Максвелла. В случае декартовых координат система тогда полностью описывается векторным потенциалом $A = A_3(x_1, x_2)e_3$ как

$$\nabla^2 A_3 = -\epsilon_3 + \text{завиток}(\text{завиток } A_3 e_3) \quad \sigma(v \times \text{завиток } A_3 e_3) = J_3 e_3 + \text{завиток } M \quad t \mu \quad (22.1)$$

где $J_3 e_3$ — плотность электрического тока, а ток намагничивания выражается через плоский вектор намагничивания $M = M_1 e_1 + M_2 e_2$. Кроме того, v — необязательное поле скорости, описывающее движение тела. Следует отметить, что если движение моделируется посредством выполнения жесткого движения предыдущей сетки в текущую конфигурацию, эффект движения может быть включен в общую производную по времени, и v не нужно указывать явно; см. обсуждение в связи с трехмерными уравнениями.

При использовании цилиндрических координат (r, ϕ, z) ротор векторного потенциала $A = A_\phi(r, z)e_\phi$ имеет компоненты $(-zA_\phi, 0, rA_\phi + A_\phi/r)$ относительно ортонормированного базиса $\{e_r, e_\phi, e_z\}$. Уравнение поля тогда задается как

$$\nabla^2 A_\phi = -\epsilon_\phi + \text{rot} \left(\frac{1}{r} \text{ротор } A_\phi e_\phi \right) \quad \sigma(v \times \text{ротор } A_3 e_3) = J_\phi e_\phi + \text{завиток } M, \quad (22.2)$$

при этом вектор намагниченности равен $M = M_r e_r + M_z e_z$.

Гармоническая версия уравнения получается заменой оператора ∇^2 умножением на $i\omega$ и решением векторного потенциала как комплекснозначного поля. В случае гармонической задачи, описанной в декартовых координатах, выделение тепла Джоулевым методом в неподвижных проводниках может быть вычислено из

$$q = \frac{1}{2} \sigma |\mathbf{A}_3|^2.$$

Поскольку электропроводность σ может быть прерывистой на границах материала, представляется заманчивым вычислить поле без нее и выполнить умножение в решателе тепла, где требуется исходный член.

22.2.1 Граничные условия

Граничное условие Дирихле для $\mathbf{A}_3$ просто

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A} \quad \frac{\mathbf{b}}{3}. \quad (22.3)$$

Так как теперь у нас есть

$$\text{ротор } \mathbf{A}_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{n} = (\mathbf{A}_3 \mathbf{n}) \mathbf{e}_3,$$

естественные граничные условия типа

$$\frac{1}{m} \frac{\mathbf{A}_3}{\mathbf{n}} = \mathbf{g} \quad (22.4)$$

может быть использовано в качестве альтернативы. Может быть трудно распространить условия Дирихле достаточно далеко. Тогда можно использовать сферически симметричное приближение дальнего поля. Это дает граничное условие типа Робина, которое соответствует выбору

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{m} \mathbf{A}_3 \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|^2} \quad (22.5)$$

в (22.4). Если граничные условия не указаны, то преобладает естественное граничное условие с $\mathbf{g} = 0$.

22.3 Ключевые слова

Ключевые слова для MagnetoDynamics2D

Здесь мы перечислим ключевые слова, которые имеют значение при использовании модуля MagnetoDynamics2D и которые также могут быть общими для других решателей. Такие общие ключевые слова относятся к указанию параметров материала, объемных сил и граничных условий.

Константы

Проницаемость вакуума **Реальная** Эта константа

имеет значение по умолчанию $4\pi \cdot 10^{-7}$ в единицах СИ. В другой системе единиц измените это значение соответствующим образом.

Материал **коврика** ID

Следующие параметры материалов могут использоваться всеми решателями модуля.

Электропроводность **Реальная** Это

ключевое слово используется для указания электропроводности σ .

Relative Permeability **Real** Если используется

это ключевое слово, проницаемость μ может быть определена в терминах проницаемости вакуума.

Чтобы получить проницаемость, значение этого ключевого слова затем внутренне умножается на проницаемость вакуума. Вместо использования этого ключевого слова можно использовать ключевые слова Permeability или Reluctivity.

Проницаемость **Реальная** Это

ключевое слово может использоваться для непосредственного указания проницаемости μ .

Reluctivity Real Значение этого

ключевого слова определяет удельную магнитную индукцию ν . Тогда проницаемость принимается равной $\mu = 1/\nu$.

Намагниченность i Действительная

Компоненты вектора намагниченности, $i = 1, 2$.

НВ Кривая Кубическая Действительная

Кривая НВ должна быть задана как кубический сплайн. Это позволяет аналитически вычислить производную кривой из коэффициентов сплайна.

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения MgDyn2D

Это ключевое слово дает описательное имя для дискретной модели, обрабатываемой этим решателем. Имя может быть изменено, если оно используется последовательно.

Файл процедуры "MagnetoDynamics2D" "MagnetoDynamics2D"

Это объявление определяет имя подпрограммы решателя.

Потенциал переменной строки Имя переменной

может быть выбрано свободно при условии, что оно будет последовательно использоваться и в других местах. Соответствующее число степеней свободы всегда должно быть равно единице.

Nonlinear System Max Iterations Integer Если материалы законы

нелинейны, уравнению может потребоваться несколько итераций, прежде чем будет достигнуто решение. Это ключевое слово дает максимальное количество итераций. Значение по умолчанию — одна. Если задана нелинейная кривая НВ, то линеаризация Ньютона применяется после первой итерации.

Нелинейная система Сходимость Допуск Действительный

Это ключевое слово задает допуск сходимости для нелинейной итерации.

Body Force bf идентификатор

В разделе силы тела пользователь может указать различные источники объема.

Плотность тока. Действительная

величина. Это ключевое слово используется для указания плотности тока в направлении z/ϕ .

Скорость Лоренца i Действительная Это

ключевое слово может использоваться для определения дополнительной скорости ν .

Граничное условие bc id

Потенциал Реальный

Если переменной присвоено имя Potential, это ключевое слово можно использовать для указания условия Дирихле для векторного потенциала.

Бесконечность BC Логическая

Устанавливает условия дальнего поля для векторного потенциала, предполагая сферическую симметрию на расстоянии.

Миномет BC Целое число

Это обеспечивает непрерывность в случае вращающихся граничных условий с помощью метода конечных элементов раствора.

Ключевые слова для MagnetodDynamics2DHarmonic

Здесь перечислены только дополнительные ключевые слова, связанные с гармоническим решателем. Для других ключевых слов см. определения выше.

Материал коврика ID

Электропроводность в реале

Мнимая часть электропроводности.

Намагничивание i Im Real

Мнимые компоненты вектора намагниченности, $i = 1, 2$.

Решатель решателя идентификатор

Строка уравнения MgDyn2DHarmonic Имя решателя.

Файл процедуры "MagnetoDynamics2D" "MagnetoDynamics2DHarmonic"

Это объявление определяет имя подпрограммы решателя.

Переменный струнный потенциал[Потенциал Re:1 Потенциал Im:1]

Имя переменной может быть выбрано произвольно при условии, что оно будет последовательно использоваться и в других местах.

Соответствующее число степеней свободы всегда должно быть равно двум.

Body Force bf идентификатор

Плотность тока Im Real

Это ключевое слово используется для указания мнимой части плотности тока.

Ключевые слова для BSolver

Наконец, может быть вызван дополнительный решатель для вычисления производных полей. Примечание: описанная здесь подпрограмма BSolver устарела. Рекомендуется использовать подпрограмму MagnetoDynamicsCalcFields в модуле MagnetoDynamics для постобработки.

Решатель решателя идентификатор

Решатель постобработки в настоящее время решает только для плотности магнитного поля. Размер запрашиваемого векторного поля равен 2, если целевая переменная имеет вещественное значение, и 4, если она имеет комплексное значение. Пользователю не нужно указывать выходные поля.

Строка уравнения BSolver

Дано описательное имя для решателя. Его можно менять, пока оно используется последовательно.

Файл процедуры "MagnetoDynamics2D" "BSolver"

Приводится имя подпрограммы решателя.

Целевая переменная строка

Это ключевое слово используется для указания имени базовой потенциальной переменной; по умолчанию — Potential.

Прерывистый Галеркин Логический

Производные поля являются прерывистыми, если свойства материала имеют скачки. Поэтому визуализации более привлекательны, если полям разрешено быть прерывистыми. Установка этого флага в True активирует прерывистое вычисление Галеркина (DG) полей. Обратите внимание, что эти поля совместимы только с определенными методами постобработки. Один из возможных способов — использовать вывод vtu и запросить элементарные поля для сохранения, например, Vector Field Elemental 1.

Средний в пределах материалов Логический

Если запрашивается формулировка DG для полей, это приводит к усреднению полей внутри материалов.

Расчет джоулевого нагрева Логический [Верно]

Автоматический расчет джоулевого нагрева может быть включен этим ключевым словом. Значение по умолчанию — False. Ключевое слово применимо только для гармонического случая. Результатом вычисления являются две дополнительные переменные. Джоулевоe нагревание дает абсолютное нагревание, а Джоулевоe поле — поле, которое дает нагревание при умножении на электропроводность. Это может потребоваться, если электропроводность прерывистая, что делает также прерывистой мощность нагрева.

Desired Heating Power Real Константа, которая

дает желаемую общую мощность нагрева в Ваттах. Если ключевое слово активно, то Джоулевоe Нагревание и Джоулевоe Поле умножаются на отношение желаемой и вычисленной мощности нагрева.

Модель 23

Уравнение магнитной индукции

Имя модуля: MagneticSolve

Подпрограммы модуля: MagneticSolver

Авторы модуля: Юха Руоколайнен

Авторы документа: Вилле Саволайнен, Антти Пурсула

23.1 Введение

Уравнение магнитной индукции описывает взаимодействие проводящей жидкости или газа с приложенными и индуцированными магнитными полями в области низких частот. Уравнение индукции для плотности магнитного потока всегда связано с уравнением Навье-Стокса для движения жидкости. Магнитное поле, в свою очередь, вызывает силу Лоренца в уравнении Навье-Стокса. Жидкость обычно горячая, и уравнение Навье-Стокса часто связано также с уравнением теплопроводности.

Решатель уравнения индукции может быть использован и в теле без движущейся жидкости, т. е. когда $v = 0$ и уравнение Навье-Стокса не решается. В этом случае задача относится к области магнито-квазистатики.

23.2 Теория

Уравнение магнитной индукции может быть выведено из уравнений Максвелла, при этом ток смещения $\epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ пренебрегая законом Ома для проводящих жидкостей, для поведения $J = \sigma(E + v \times B)$. Это приближение в законе Ампера, электромагнитных полей в проводящих движущихся жидкостях называется магнитогидродинамикой.

Уравнение магнитной индукции имеет вид

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \nabla \times (v \times B) = 0, \text{ см} \quad (23.1)$$

где σ — электропроводность, а μ — магнитная проницаемость материала. Они должны быть указаны с помощью ключевых слов Электропроводность и Магнитная проницаемость в разделе Материал.

Силовой член, индуцированный магнитным полем для уравнений импульса потока, определяется выражением

$$f_m = \nabla \times (B \times v), \quad (23.2)$$

и джоулево тепло в уравнении теплопроводности

$$q_m = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (B \otimes v), \quad (23.3)$$

где J — плотность тока, рассчитываемая по закону Ампера $J = \nabla \times B$. Эти объемные силы определяются ключевыми словами «сила Лоренца» и «джоулево тепло».

Магнитное поле также можно разделить на внешнее, или приложенное, и индуцированное поле, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_i$ внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_e$ создается постоянными токами или токами вне жидкости. Внешнее поле может быть задано решателю уравнения индукции либо из файла перезапуска, например, как рассчитано магнитостатическим решателем, либо определено через ключевые слова `sif`-файла `Applied Magnetic Field 1, 2 и 3`. Если используется файл перезапуска, компоненты $\mathbf{B}_e$ считываются из переменных, называемых плотностью магнитного потока 1, 2 и 3. Если используются оба метода, два приложенных поля суммируются. Предполагается, что источники внешнего поля находятся вне области потока, т. е. $\nabla \cdot \mathbf{B}_e = 0$, и что производную по времени внешнего поля можно игнорировать. Однако производная по времени $\partial \mathbf{B}_e / \partial t$ может быть задана напрямую с помощью ключевых слов `Magnetic Bodyforce 1, 2 и 3`. Решатель уравнения индукции выдает компоненты индуцированного магнитного поля $\mathbf{B}_i$.

Доступны как переходные, так и стационарные решатели для магнитогидродинамической системы (индукция, уравнения Навье-Стокса и теплопроводности). Магнитостатические и гармонические по времени решатели для внешнего магнитного поля описаны в другом месте Руководства по моделям. В некоторых случаях также возможно, что скорость известна априори, например, при изучении индукции во вращающемся теле. Тогда можно использовать заданную пользователем скорость вместо вычисления скорости из уравнений Навье-Стокса.

В настоящее время уравнение индукции можно решить в цилиндрически-симметричной или общей трехмерной формулировке.

23.2.1 Граничные условия

Для уравнения индукции можно применить либо граничные условия Дирихле, либо естественные граничные условия. В обоих случаях необходимо проверить, что вычислительная область достаточно расширена, чтобы избежать численных ошибок. По этой причине можно решить задачу магнито-квазистатики в смежном теле.

Граничное условие Дирихле для компоненты индуцированного магнитного поля B_i (мы опустили теперь верхний индекс i , который обозначает индуцированное поле, равен

$$B_i = B_{i, \text{я}}. \quad (23.4)$$

$B_{i, \text{я}}$ может быть константой или функцией времени, положения или других переменных. Ключевые слова для граничных условий Дирихле — Магнитное поле 1, 2 и 3.

В цилиндрически симметричном случае граничное условие Дирихле для азимутальной компоненты B_ϕ находится в тех же единицах, что и для двух других компонент, т. е. в Т, а не для контравариантной компоненты. На оси симметрии следует положить $B_r = 0$ и $B_\phi = 0$, а $B_z / r = 0$ применяется неявно.

Если условие Дирихле не указано, применяется естественное граничное условие.

23.3 Ключевые слова

Решатель решателя идентификатор

Обратите внимание, что все ключевые слова, относящиеся к линейному решателю (начиная с `Linear System`), могут использоваться и в этом решателе. Они определены в другом месте.

Строка уравнения [Магнитная индукция]

Имя уравнения. Также возможно использовать этот решатель как внешнюю процедуру. Тогда имя уравнения должно быть вышеприведенным (используйте, например, `Magnetic Field Solver`). Также следующие четыре ключевых слова должны быть добавлены со значениями, указанными здесь.

Файл процедуры "MagneticSolve" "MagneticSolver"

Переменное струнное магнитное поле

Переменные DOF Целое число 3

Экспортируемая переменная 1 = -dofs 3 электрический ток Четыре приведенных выше ключевых слова следует указывать только при использовании решателя в качестве внешней процедуры.

Нелинейная система Сходимость Допуск Действительный

Это ключевое слово дает критерий для прекращения нелинейной итерации после того, как относительное изменение нормы полевой переменной между двумя последовательными итерациями k станет достаточно малым.

$$\| \mathbf{B}^k - \mathbf{B}^{k-1} \| < \| \mathbf{B}^k \|,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Nonlinear System Max Iterations *Integer* Максимальное количество нелинейных итераций, которые разрешено выполнять решателю. Если ни параметры материала, ни граничные условия не являются функциями решения, задача линейна, и это должно быть установлено в 1.

Nonlinear System Relaxation Factor *Real* Присвоение этого ключевого слова запускает использование релаксации в решателе нелинейных уравнений. Использование фактора ниже единицы иногда требуется для достижения сходимости нелинейной системы. Фактор выше единицы может ускорить сходимость. Расслабленная переменная определяется следующим образом:

$$B = \lambda B^{(k)} + (1 - \lambda) B^{(k-1)},$$

где λ — фактор, заданный этим ключевым словом. Значение по умолчанию для фактора релаксации — единица.

Допуск сходимости устойчивого состояния *Real* С этим ключевым словом задается допуск сходимости устойчивого состояния или связанной системы для конкретного уравнения. Все активные решатели уравнений должны соответствовать собственным допускам для своей переменной и, прежде чем вся система будет считаться сошедшейся. Критерий допуска:

$$||u_i - u_{i-1}|| < ||u_i||,$$

где — значение, заданное этим ключевым словом.

Уравнение eq id

Раздел уравнений используется для определения набора уравнений для тела или набора тел:

Логика магнитной индукции Если установлено значение True, решите уравнение магнитной индукции.

Скорость, определяемая пользователем *Логическая* Управляет тем, задается ли скорость пользователем или вычисляется другим решателем. Значение по умолчанию — False, что означает, что используется решение скорости уравнений Навье-Стокса.

Навье-Стокса *Логический* Если установлено значение True, также решаются уравнения Навье-Стокса. Для магнитогидродинамики это делается, за исключением случаев, когда вычислительная область для магнитного поля выходит за пределы жидкости.

Логическое уравнение теплопроводности. Если установлено значение True, также решается уравнение теплопроводности.

Раздел «Теловидная сила»

можно использовать для задания дополнительных силовых членов для уравнений.

Логическая сила Лоренца. Если установлено значение true, активируется сила магнитного поля для уравнений импульса потока.

Логический расчет джоулева тепла Если установлено значение true, в уравнение теплопередачи добавляется джоулево тепло.

Магнитная сила тела i *Real* Это ключевое слово может быть использовано для явного указания временной зависимости внешнего поля, т. е. члена $B = e^{-t}$. Это особенно полезно для гармонических по времени полей, где производная по времени может быть легко вычислена и выражена.

Начальное состояние ic id

Раздел начальных условий может использоваться для установки начальных значений для переменных поля. Следующие переменные являются активными:

Магнитное поле i *Real* Для каждой компоненты плотности магнитного потока $i = 1, 2, 3$.

Материал `коврика ID`

Раздел материала используется для задания значений параметров материала. Следующие параметры материала могут быть установлены для уравнения индукции. Они могут быть константой или функцией заданной переменной.

Магнитная проницаемость `Real` Магнитная

проницаемость задается этим ключевым словом. Для большинства жидкостей можно использовать значение вакуума для μ_0 , а ключевое слово установить на $1.25664e-6$.

Электропроводность `Real` Значение

электропроводности задается ключевым словом. Например, для политермических потоков проводимость может быть функцией температуры.

Приложенное магнитное поле `i Real`

Это ключевое слово может быть использовано для указания внешнего поля или его части и его вклада в член $\times (v \times B e)$. Поле может быть функцией, например, времени или положения.

MHD Скорость `i Реальная`

Скорость, определяемая пользователем, может быть задана с помощью следующих ключевых слов: $i=1,2,3$.

Граничное условие `bc id`

Раздел граничных условий содержит значения параметров для различных типов граничных условий.

Граничные условия Дирихле могут быть установлены для всех первичных переменных поля. Те, которые связаны с уравнением индукции, являются

Магнитное поле в реальности

Граничное условие Дирихле для каждой компоненты плотности магнитного потока $i = 1, 2, 3$.

Модель 24

Электростатика уменьшенной размерности

Имя модуля: StatElecBoundary

Подпрограммы модуля: StatElecBoundaryForce, StatElecBoundaryEnergy,

СтатЭлектроГраницаЗаряд, СтатЭлектроГраницаПружина

Авторы модуля: Питер Рабак

Авторы документа: Питер Рабак

24.1 Введение

В некоторых приложениях геометрия такова, что трехмерная электростатика может быть довольно точно сведена к одномерной задаче. Это имеет место для почти выровненных плоскостей. Если угол между плоскостями равен ϕ (в радианах), ошибка этого приближения составляет примерно $2\phi/3$. Поэтому мы можем использовать аналитическое решение, которое получается непосредственно из расстояния до плоскостей, которые находятся в разном потенциале. Идеальная модель может быть дополнительно развита с учетом перфорированных структур и диэлектрических слоев.

24.2 Теория

Здесь предполагается, что электрическое поле стационарно в рассматриваемом масштабе времени. Электрическое поле E может быть выражено с помощью электрического скалярного потенциала ϕ ,

$$E = -\nabla \phi. \quad (24.1)$$

Если свободных зарядов нет, скалярный потенциал можно решить из

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (24.2)$$

Когда одно измерение намного меньше двух других, мы можем предположить, что поле одномерно. Тогда электрическое поле, возникающее из-за разности потенциалов $\Phi = \phi_1 - \phi_2$, равно

$$E = E_n = n, d \frac{\Phi}{d} \quad (24.3)$$

где n — единичная нормаль, а $d(r)$ — высота апертуры. Плотность энергии на единицу площади теперь равна,

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Phi}{d} \right)^2 d. \quad (24.4)$$

что соответствует индуцированной плотности заряда на поверхности

$$D = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (24.5)$$

Сила получается из производной энергии,

$$f = \frac{e}{d} = \frac{2 \varepsilon \Phi}{2d^2}, \quad (24,6)$$

и коэффициент жесткости пружины из производной силы,

$$fk = \frac{e}{d} = \frac{\varepsilon \Phi^2}{d^3}, \quad (24,7)$$

Силы и коэффициенты жесткости всегда направлены в направлении нормали к поверхности, поскольку любое другое направление несовместимо с исходными предположениями.

24.2.1 Электростатика перфорированных конструкций

Если в конструкции есть отверстия или другие дефекты, они могут быть гомогенизированы по всей площади. Вычисляя электрическую энергию и силу при наличии и отсутствии отверстий, мы получаем поправочные коэффициенты

$$e_{holes} = \alpha e_{ideal} \quad (24,8)$$

и

$$f_{holes} = \beta f_{ideal} \quad (24,9)$$

Поправочные коэффициенты могут быть предварительно рассчитаны для заданной геометрии. Однако, если относительное изменение апертуры велико, поправочные коэффициенты должны быть смоделированы каким-либо образом. Мы также хотели бы иметь аналогичные выражения для константы пружины

$$k_{holes} = \gamma k_{ideal}. \quad (24,10)$$

Если предположить, что e_{holes} пропорционален $1/d$, то можно легко вывести следующие соотношения.

$$\beta = \alpha \quad \alpha d \quad (24,11)$$

и

$$\text{равно } \alpha = \alpha d + \alpha d^2 \quad \frac{1}{2} \text{ у знак}, \quad (24,12)$$

где вывод сделан относительно d .

Теперь нам осталась только проблема нахождения хорошего функционального приближения для α . Отверстия в мембране можно выразить с помощью трех безразмерных переменных $\tilde{d} = d/r$, $\tilde{b} = b/r$ и $\tilde{R} = R/r$. Здесь r — радиус отверстия, b — глубина отверстия, d — апертура и R — расстояние между отверстиями. ¹ и Когда $R \gg b \gg 1$, поправка зависит только от $\tilde{d}$.

Численные расчеты показывают, что поправка $\alpha(\tilde{d})$ должна стремиться к единице по мере того, как расстояние $\tilde{d}$ стремится к единице. С другой стороны, она должна стремиться к $1 - q$ для малых значений $\tilde{d}$. Здесь q — доля площади отверстий.

Численные расчеты показывают, что рациональный полином второго порядка дает довольно точное соответствие вычисленным результатам,

$$\alpha(d) = 1 - q \frac{1}{1 + a_1 d + a_2 d^2}. \quad (24,13)$$

Полностью аналитические формулы теперь более утомительны, но значения β и γ легко вычисляются с использованием производных

$$\alpha(d) = q \left(1 + \frac{a_1 + 2a_2 d}{1 + a_1 d + a_2 d^2} \right)^2, \quad (24,14)$$

и

$$\alpha(d) = 2q \frac{a_2 - 2a_1^2 - 3a_1 a_2 d - 3a_2^2 d^2}{(1 + a_1 d + a_2 d^2)^3}. \quad (24,15)$$

Метод наименьших квадратов, соответствующий численным расчетам, показывает, что для цилиндрического отверстия $a_1 = 4,2523$, $a_2 = 0,4133$, для прямоугольного паза $a_1 = 2,3198$, $a_2 = 0,2284$ и для квадратного отверстия $a_1 = 3,8434$, $a_2 = 0,3148$. При подгонке модели предложенный постоянный член отклонялся от единицы на 4 %, но значение один все равно было принято, поскольку оно обладает хорошими свойствами предельного значения.

24.2.2 Диэлектрический слой

Если проводник покрыт слоем диэлектрика, нам нужно изменить уравнения. Мы предполагаем, что отверстие состоит из двух материалов с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 и толщинами d_1 и d_2 . Поскольку поток должен быть одинаковым, это означает, что поля

$$E_1 = d_1 \frac{\Phi}{\epsilon_1 d_2 / \epsilon_2} \quad (24.16)$$

и

$$E_2 = \frac{\Phi}{\epsilon_2 d_1 / \epsilon_1 + d_2}. \quad (24.17)$$

Определяя $dx = d_1 + \epsilon_1 d_2 / \epsilon_2$, они становятся

$$E_1 = dx \frac{\Phi}{\epsilon_1 d_2} \quad (24.18)$$

и

$$E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\Phi}{dx}. \quad (24.19)$$

Тогда полная плотность энергии равна

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_1 F^2 \frac{d_1}{A^2} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \Phi^2 \frac{d_2}{A^2} = \frac{\epsilon_1 \Phi^2}{2 dx}. \quad (24.20)$$

Предположим, что резонатор движется так, что d_1 изменяется, а d_2 остается постоянным. Тогда плотность силы равна

$$f_k = \frac{d}{dx} \left(\frac{\epsilon_1 \Phi^2}{2 dx} \right) = \frac{\epsilon_1 \Phi^2}{2 d^2}. \quad (24.21)$$

И аналогично плотность пружины

$$f_k = \frac{\epsilon_1 \Phi^2}{2 d^2}. \quad (24.22)$$

Эти выражения можно использовать внутри интеграла вместо постоянных значений поля для учета диэлектрического слоя. Можно отметить, что уравнения точно такие же, как и для случая без слоя, за исключением того, что апертура d заменяется эффективной апертурой $dx = d_1 + \epsilon_1 d_2 / \epsilon_2$.

24.3 Проблемы внедрения

Этот модуль сам по себе не является решателем. Он только обеспечивает граничные условия для реальных моделей. Естественные модели, которые можно объединить с этими граничными условиями, являются моделями, описывающими деформацию в твердых структурах. Для пластин условия применяются к ведущему измерению, тогда как для общих трехмерных твердых тел условия применяются к границам. Поэтому одни и те же подпрограммы могут применяться как к границе, так и к сечению материала. На самом деле существует только одна подпрограмма, а возвращаемое ею значение определяется именем подпрограммы, используемой для ее вызова.

Эти процедуры были исторически разработаны для моделирования МЭМС в других условиях и были гораздо позже добавлены в публикацию с открытым исходным кодом как облегченная версия.

24.4 Ключевые слова

Константы

Диэлектрическая проницаемость вакуума действительная [8.8542d-12]

Значение по умолчанию указано в единицах СИ. В других единицах константу следует изменить соответствующим образом.

Граничное условие bd id

Процедура "StatElecBoundary" "StatElecBoundaryForce"

Функция, возвращающая плотность узловой силы.

Процедура "StatElecBoundary" "StatElecBoundaryCharge"

Функция, возвращающая узловую плотность заряда.

Процедура "StatElecBoundary" "StatElecBoundaryEnergy"

Функция, возвращающая узловую плотность энергии.

Процедура "StatElecBoundary" "StatElecBoundarySpring"

Функция, возвращающая плотность узловой пружины.

Gap Height Real Distance, на

котором применяется 1D электростатическая модель. Может зависеть от смещения, например, через функции MATC.

Потенциальная разница действительная

Разность потенциалов между пластинами.

Относительная диэлектрическая проницаемость Реальная

относительная диэлектрическая проницаемость материала между пластинами.

Толщина слоя реальная

Наверху пластины может быть непроводящий слой. Если это ключевое слово не определено, то предполагается отсутствие слоя.

Реальная диэлектрическая проницаемость слоя

Относительная диэлектрическая проницаемость слоя.

Тип отверстия: струна [прорезь / круглая / квадратная]

Одномерная электростатика может также учитывать перфорированные структуры, если глубина отверстия велика по сравнению с его шириной. Различными геометриями отверстий являются бесконечная щель, круглое отверстие и квадратное отверстие.

Реальный размер отверстия

Размер отверстия составляет для круглого отверстия радиус, для квадратного — половину стороны, а для щелевого — половину ширины.

Дробь отверстия Действительная

Доля отверстий на поверхности.

Глубина отверстия Реальная

Глубина отверстий, т.е. толщина перфорированной пластины.

Модель 25

Уравнение Пуассона-Больцмана

Имя модуля: PoissonBoltzmannSolve

Подпрограммы модуля: PoissonBoltzmannSolve

Авторы модуля: Питер Рабак

Авторы документа: Питер Рабак

25.1 Введение

Макроскопическая электромагнитная теория управляется уравнениями Максвелла. В стационарном состоянии электрическое поле обычно можно решить с помощью простого уравнения Пуассона. Однако, если в области есть свободные заряды, на которые влияет электрическое поле, уравнение больше недействительно. Также необходимо учитывать вклад свободных зарядов. Если электростатическая сила является единственной силой, влияющей на распределение электрических зарядов, то потенциал в стационарном состоянии определяется уравнением Пуассона-Больцмана [1].

Это уравнение может найти свое применение в микрофлюидике и электрохимических приложениях. Обратите внимание, что если распределение заряда зависит от распределения потока несущей жидкости, это уравнение больше недействительно.

25.2 Теория

Электростатическое уравнение для электрического потенциала ϕ дает:

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon, \quad (25.1)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, а ρ — плотность заряда. Предполагая, что есть фиксированная плотность заряда и как положительные, так и отрицательные движущиеся ионы, заряд можно записать как

$$\rho = \rho_0 + e(z_+ n_+ - z_- n_-), \quad (25.2)$$

где ρ_0 — внутреннее распределение заряда фиксированных положений всех зарядов растворенного вещества, e — единичный заряд электрона, z — зарядовое число положительных или отрицательных ионов, n — соответствующая плотность ионов.

Электрохимический потенциал μ ионов определяется как $\mu = e\phi + kBT \ln n$, где первый член представляет собой электростатический вклад, а второй член возникает из-за энтропии ионов на пределе слабого раствора. В равновесии μ_i постоянен во всей области, и, таким образом, плотность ионов подчиняется распределению Больцмана,

$$n_i = n_{i0} \exp(-e\phi / kBT) \quad (25.3)$$

где kB — постоянная Больцмана. Подставляя это в уравнение Пуассона, получаем уравнение Пуассона-Больцмана, которое определяет потенциальное поле самосогласованно,

$$\nabla^2 \phi = \rho_0 + e \sum_i z_i n_{i0} \exp(-e\phi / kBT) \quad (25.4)$$

Частный случай уравнения получается, если зарядовые числа и концентрации равны, $z = +1$, $n_+ = n_0$ и $n_- = n_0$. Тогда уравнение упрощается до

$$\epsilon \nabla^2 \phi = \rho_0 \left(2e n_0 \sinh(ez\phi/kBT) \right). \quad (25,5)$$

Уравнение Пуассона-Больцмана, очевидно, нелинейно. Мы покажем итеративную процедуру только для этого случая, общий случай рассматривается аналогично.

25.2.1 Схема итерации

Определяя $\alpha = 2e n_0$ и $\beta = ez/kBT$, уравнение Пуассона-Больцмана для симметричного электролита можно записать как

$$\epsilon \nabla^2 \phi = \rho_0 - \alpha \sinh(\beta\phi). \quad (25,6)$$

Прямая итерационная процедура обрабатывает только левую часть уравнения неявным образом,

$$\epsilon \nabla^2 \phi^{(n+1)} = \rho_0 - \alpha \sinh(\beta\phi^{(n)}). \quad (25,7)$$

Однако сходимость этой схемы довольно плохая для многих случаев практического интереса. Улучшенная стратегия должна линеаризовать также и правую часть.

Используя расширение Тейлора, мы можем приблизиться

$$\sinh(\beta\phi^{(n+1)}) \approx \sinh(\beta\phi^{(n)}) + \beta \cosh(\beta\phi^{(n)}) (\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}) \quad (25,8)$$

что приводит к итерационной схеме Ньютона

$$\epsilon \nabla^2 \phi^{(n+1)} + \alpha \beta \cosh(\beta\phi^{(n)}) (\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}) = \rho_0 - \alpha \sinh(\beta\phi^{(n)}) + \alpha \beta \cosh(\beta\phi^{(n)}) \phi^{(n)}. \quad (25,9)$$

Эта схема обладает хорошими свойствами сходимости и обычно является методом выбора.

25.2.2 Граничные условия

Для электрического потенциала можно использовать граничное условие Дирихле или Неймана. Граничное условие Дирихле дает значение потенциала на указанных границах. Граничное условие Неймана используется для задания условия потока на указанных границах

$$\sigma = \epsilon \nabla \phi \cdot \mathbf{n}, \quad (25,10)$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

25.2.3 Производные величины

После того, как потенциал решен, электрическое поле может быть получено в качестве шага постобработки из

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (25,11)$$

Плотность заряда может быть получена как правая часть уравнения Пуассона,

$$\rho = \rho_0 + e z n_+ \exp(-ez\phi/kBT) - e z n_- \exp(ez\phi/kBT). \quad (25,12)$$

что в симметричном случае дает,

$$\rho = \rho_0 - 2e z n_0 \sinh(ez\phi/kBT). \quad (25,13)$$

Плотность энергии поля может быть вычислена из

$$u = \frac{1}{2} \epsilon \nabla \phi \cdot \nabla \phi = \frac{1}{2} \epsilon (\nabla \phi)^2. \quad (25,14)$$

Однако в более общем случае вклад концентрации также следует включить в выражение энергии.

25.3 Заметки по выходному контролю

Пользователь может контролировать, какие производные величины (например, электрическое поле и электрическая энергия) рассчитываются.

Также доступны два варианта типов визуализации для производных величин. Значения узлов могут быть рассчитаны путем взятия среднего значения производных значений на соседних элементах (постоянные веса).

Это часто приводит к визуально хорошим изображениям. Другой возможный выбор — взвешивать среднее значение с размером элементов, что более точно и должно использоваться, когда какая-то другая переменная зависит от этих производных значений. Последний выбор также является выбором по умолчанию.

25.4 Ключевые слова

Константы

Диэлектрическая проницаемость вакуума действительная [8,8542e-12 C2/Nm2]

Константа Больцмана Действительная [1,3807e-23 Дж/К]

Единица заряда Действительная [1.602e-19 C]

Уравнение идентификатор уравнения

Расчет электрической энергии Логический [Ложь]

Контролирует, записывается ли плотность электрической энергии в файлы результатов (по умолчанию False).

Решатель решателя идентификатор

Уравнение Строка Пуассона Больцмана Решатель

Переменный струнный потенциал

Это может быть любое название, если оно последовательно используется в других местах.

Переменные DOF Целое число 1

Степени свободы для потенциала.

Процедура Файл ПуассонаБольцманаРешить ПуассонаБольцманаРешить

Ниже перечислены три ключевых слова со значениями по умолчанию для управления выводом.

Нелинейная система Макс. итерации Целое число

Максимальное количество нелинейных итераций.

Допуск сходимости нелинейной системы Действительный Относительная
ошибка, после которой итерация прекращается.

Нелинейная система Ньютона после итераций Integer

Количество итераций, после которых включается итерация Ньютона. Значение по умолчанию равно нулю, что обычно должно быть оптимальным.

Нелинейная система Ньютон после допуска Действительный

Необязательный параметр, который задает допуск погрешности, после которого включается итерация Ньютона.

Рассчитать электрическое поле Логика [Верно]

Рассчитать электрический поток логически [True]

Постоянные веса Логические [True]

Используется для включения постоянного взвешивания результатов.

Материал коврика ID

Относительная диэлектрическая проницаемость. Полная

диэлектрическая проницаемость является произведением относительной диэлектрической проницаемости и диэлектрической проницаемости вакуума.

Реальная опорная температура

Это ключевое слово используется для указания температуры, встречающейся в факторе Больцмана.

Номер заряда Целое число

Для симметричных случаев число заряда. Для несимметричных случаев можно указать отдельно положительное число заряда и отрицательное число заряда.

Плотность ионов Целое число Для

симметричных случаев исходная плотность ионов. Для несимметричных случаев можно задать отдельно плотность положительных ионов и плотность отрицательных ионов.

Возможен также альтернативный набор параметров, который особенно подходит для целей тестирования.

Они ограничены симметричным случаем, где потенциал, нормализованный с потенциалом Дзета, решен. Тогда диэлектрические проницаемости должны быть установлены на единицу, и для определения нужны только две переменные случай.

Пуассон Больцман Бета Действительный

Это ключевое слово дает отношение параметра β к дзета-потенциалу.

Пуассон Больцман Альфа Действительный

Это ключевое слово задает параметр α

Body Force идентификатор bodyforce

Плотность заряда. Реальное

распределение фиксированного заряда, на которое не влияет электрическое поле.

Граничное условие bc id

Потенциал Реальный

Электрический поток BC Логический

Необходимо установить значение True, если используется поток BC.

Поверхностный заряд

Действительный. Дает поверхностный заряд для граничного условия Неймана.

Библиография

- [1] Д. Андельман. Справочник по биологической физике, глава 12. Электростатические свойства мембран: Теория Пуассона-Больцмана. Elsevier Science, 1995.

Модель 26

Оценка потерь с использованием Фурье Ряд

Имена модулей: FourierLoss

Подпрограммы модуля: FourierLossSolver

Авторы модуля: Питер Р врасплох, Мика Малинен

Авторы документа: Мика Малинен, Питер Р врасплох

26.1 Введение

Основной мотивацией для этого решателя является оценка электромагнитных потерь с использованием подхода уравнения Штейнмеца. Он может иметь и другие применения. Основная идея заключается в том, чтобы сделать преобразование Фурье на лету и вычислить потери, которые пропорциональны частоте всегда, когда полный цикл завершен.

Дано эволюционное конечно-элементное поле

$$A \chi(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \psi_j(x), \quad (26.1)$$

решатель позволяет заменить эволюцию скалярных степеней свободы $\alpha_j(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + T]$ на Аппроксимация ряда Фурье

$$\alpha_j(t) = a_{j0} + \sum_{k=1}^K a_{jk} \cos[k\omega(t - t_0)] + \sum_{k=1}^K b_{jk} \sin[k\omega(t - t_0)], \quad (26.2)$$

где угловая частота ω может быть определена в терминах периода T как $\omega = 2\pi/T$. Коэффициенты a_{jk} и b_{jk} даются

$$\begin{aligned} a_{j0} &= \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_j(t + t_0) dt, \\ a_{jk} &= \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_j(t + t_0) \cos(2\pi k t / T) dt, \\ b_{jk} &= \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_j(t + t_0) \sin(2\pi k t / T) dt. \end{aligned} \quad (26.3)$$

На практике алгоритм пошагового измерения времени дает значения $a_j(t)$ только для дискретного набора значений времени, а для генерации $a_j(t)$ в других точках применяется линейная интерполяция.

Использование (26.2) в (26.1) теперь дает

$$A h(x, t) = a_0(x) + \sum_{k=1}^K a_k(x) \cos[k\omega(t - t_0)] + \sum_{k=1}^K b_k(x) \sin[k\omega(t - t_0)] \quad (26.4)$$

где поля $a_k(x)$ и $b_k(x)$ имеют конечно-элементные разложения

$$a_k(x) = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{kj} \psi_j(x) \text{ и } b_k(x) = \sum_{j=1}^N \tilde{b}_{kj} \psi_j(x).$$

Если интересующее нас поле равно $B = \sum A h$, то аналогично имеем

$$B(x, t) = \sum_{k=1}^K a_0(x) + \sum_{k=1}^K a_k(x) \cos[k\omega(t - t_0)] + \sum_{k=1}^K b_k(x) \sin[k\omega(t - t_0)]. \quad (26.5)$$

Если постановка задачи задана в 3D случае, предполагается, что решение получено с использованием базиса элементов ребра. В частном случае 2D целевого поля и целевой переменной ожидается скалярное поле $A h(x, t)$, а B затем генерируется как

$$B = \frac{A h}{y} e^{x} e^{y}.$$

26.2 Оценка потерь

В типичном приложении мы имеем в виду поле A для $\nabla \cdot \mathbf{A}$ принимается за решение векторного потенциала, соответствующее формулировке электромагнитных уравнений AV. Тогда поле $B = \sum A h$ дает плотность магнитного потока, которая с учетом (26.5) может быть аппроксимирована в виде

$$B(x, t) = B_0(x) + \sum_{k=1}^K B_k(x) \cos[k\omega(t - t_0) - \varphi_k],$$

где φ_k — фазовый угол.

Мощность потерь, связанная с каждым простым гармоническим компонентом, может быть затем оценена по телу Ω используя подход уравнения Штейнмеца как

$$P_k = \int_{\Omega} C_p \cdot \frac{1}{2} B_k^2 d\Omega \quad (26.6)$$

где C , α и β — заданные данные, а $f_k = k\omega/(2\pi)$. Тогда общие потери P получаются как

$$P = \sum_{k=1}^K P_k. \quad (26.7)$$

Переменная поля P_h , связанная с этим решателем, представляет собой распределение полной мощности потерь на единицу объема, которое получается из слабой формулировки

$$\int_{\Omega} \Phi_{vh} d\Omega = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega} C_p \cdot \frac{1}{2} B_k^2 \Phi_{vh} d\Omega \quad (26.8)$$

где v_h обозначает подходящую тестовую функцию. Текущая реализация допускает несколько членов с постоянными показателями α и β . Коэффициент C , с другой стороны, варьируется в зависимости от материала и может быть функцией частоты.