Осенний семестр 2016/2017 учебного года

ЗАДАЧИ К СПЕЦКУРСУ
кафедры физики атомного ядра и квантовой теории столкновений, кафедры физики космоса физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова и кафедры медицинской физики МИФИ

"Квантовая электродинамика"

Никитин Николай Викторович

(к.ф.-м.н., доцент)

кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

Москва 2016

Квантовая теория поля – наука “ручная”, а не “ушная”. То есть ни одни даже самые лучшие лекции, прочитанные самыми искусными преподавателями (к которым я себя не смею относить), не заменят вычислений, которые каждый студент должен самостоятельно проделать. Чтобы “набить руку” в вычислениях, необходимы задачи. Желательно, чтобы задачи были корректно составлены и рационально подобраны, поскольку при современном темпе жизни фактор времени играет решающую роль.

Представленный ниже набор задач предназначен для решения студентами, которые слушают семестровый курс квантовой электродинамики (КЭД) на кафедрах физики атомного ядра и квантовой теории столкновений и физики космоса физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова и на кафедре медицинской физики МИФИ. Небольшая часть задач подробно разбирается в ходе лекций. Для значительного числа задач в лекциях дается идея решения. Задачи, помеченные знаком “$*$”, являются задачами повышенной трудности и для своего решения требуют усидчивости, превышающей среднюю студенческую. *Для допуска к экзамену требуется правильно решить не менее 75% задач, которые НЕ помечены знаком* “$*$”. Каждой задачей со “$*$” можно заменить одну любую задачу без “$*$”. Для данного семестра порог составляет **45** решенных задач.

Квантовая электродинамика - первый из курс по квантовой теории поля и физике частиц, с которым встречаются студенты. Поэтому данный курс представляет собой, по-существу, введение в методы вычисления квантовой теории поля. Если студенты дальше заинтересуются физикой частиц, то им полезно знать, что умения, полученные в процессе изучения квантовой электродинамики пригодятся им при изучении электрослабрй теории, квантовой хромодинамики и других приложений квантовой теории поля.

Обо всех замеченных неточностях и опечатках просьба сообщать автору по телефону *(495) 939–50–32* или по электронной почте *679nik@mail.ru*. В заголовке письма необходимо ставить "QFT–4 чтобы данное письмо можно было отличить от спама.

Основы математического аппарата КТП

Задача N1 Показать, что явное выражение для матрицы преобразования Лоренца $\Lambda^{\mu}_{\nu}(\vec{v}\,)$ в случае, если система отсчета A' движется относительно системы отсчета A со скоростью $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$, имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v^1}{c}\gamma & \frac{v^2}{c}\gamma & \frac{v^3}{c}\gamma \\ \frac{v^1}{c}\gamma & 1 + \frac{v^1 * v^1}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v^1 * v^2}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v^1 * v^3}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) \\ \frac{v^2}{c}\gamma & 1 + \frac{v^2 * v^1}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v^2 * v^2}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v^2 * v^3}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) \\ \frac{v^3}{c}\gamma & 1 + \frac{v^3 * v^1}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v^3 * v^2}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v^3 * v^3}{|\vec{v}\,|^2}(\gamma - 1) \end{pmatrix},$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - {|\vec{v}\,|^2}/{c^2}}$, c – скорость света в вакууме. Найти Λ^{-1}. Прямым вычислением показать, что матрица Λ является унитарной.

Задача N2 Какой вид имеет метрический тензор $g^{\mu\nu}$ в n–мерном евклидовом пространстве? А в n-мерном пространстве Минковского, которое содержит p временны́х и q пространственных измерений (естественно, что $n = p + q$)?

Задача N3 В пространстве Минковского даны два 4-вектора $a^{\mu} = (1/2,\ 1/3,\ -1/4,\ 1/2)$ и $b^{\mu} = (1/6,\ 1,\ 1/2,\ -3/4)$. Вычислить, чему равны скалярные произведения $a^{\mu}a_{\mu} \equiv a^2$, $b^{\mu}\,b_{\mu} \equiv b^2$ и $a^{\mu}b_{\mu} \equiv (ab)$.

Задача N4 Найти, чему равны свертки и произведения

$$g^{\mu}_{\mu};\quad g_{\mu\nu}g^{\mu\alpha};\quad g_{\mu\nu}g^{\alpha\mu};\quad g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}.$$

в 4-мерном пространстве Минковского.

Задача N5 Объясните, почему все нижеперечисленные свертки

$$g_{\mu\mu};\quad g_{\mu\nu}a^{\mu}b_{\nu};\quad g^{\mu}_{\nu}q^{\nu}b_{\mu}c^{\mu};\quad a^{\mu}b_{\mu}c^{\mu}d_{\mu}$$

не имеют никакого смысла.

Задача N6 При помощи явного вида матрицы преобразования Лоренца $\Lambda^{\mu}_{\nu}(\vec{v})$ (см. Задачу N1) показать, что скалярное произведение двух 4-векторов является лоренц-инвариантом.

Задача N7 Показать, что для произвольного 4–вектора A^{μ} выполняется равенство

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial A_{\nu}} = g^{\mu\nu}.$$

Задача N8 Используя результат предыдущей задачи и свойства метрического тензора найти для двух различных 4–векторов A^μ и B^ν значения следующих производных:

$$\frac{\partial\, A^\mu}{\partial A^\nu}; \quad \frac{\partial\, A_\mu}{\partial A_\nu}; \quad \frac{\partial\, A_\mu}{\partial A^\nu}; \quad \frac{\partial\, A^\mu}{\partial B_\nu}, \quad \frac{\partial\,(A^\mu\, B^\nu)}{\partial\,(A_\eta\, B_\zeta)}.$$

Сформулировать общее правило вычисления таких производных.

Задача N9 Для произвольного 4–вектора A^μ найти

$$\frac{\partial\, A^2}{\partial A_\nu},$$

где A^2 – квадрат 4-вектора A^μ.

Задача N10 Пусть x^μ и p^ν - два 4-вектора. Найти $\partial^\mu e^{\mp\, i(px)}$ и $\partial^\mu \partial_\mu e^{\mp\, i(px)}$.

Задача N11 Получить выражения для сверток $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\eta\xi\beta}$ и $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\eta\xi\delta}$.

Задача N12 В лекциях мы вычисляли свертки полностью антисимметричных тензоров при условии, что $\varepsilon^{0123} = -1$. Как изменятся значения сверток, если взять $\varepsilon^{0123} = +1$?

Задача N13 В системе $\hbar = c = 1$ проверить следующие пересчетные коэффициенты:

$$1\, \textit{ГэВ} \,\approx\, 1,78\,\times\,10^{-24}\,\textit{гр}\,\approx\,1,6\,\times\,10^{-10}\,\textit{Дж},$$

$$1\, \textit{ГэВ}^{-1} \,\approx\, 6,58\,\times\,10^{-25}\,\textit{сек}\,\approx\,1,97\,\times\,10^{-14}\,\textit{см}.$$

Задача N14* В системе $\hbar = c = 1$ найти численные значения констант, характеризующих сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное взаимодействия. Что можно сказать об иерархии этих констант?

Основы лагранжева формализма в КТП

Задача N15 Проверить, что в теории поля два лагранжиана, отличающиеся между собой на 4-дивергенцию некоторого 4-вектора (т.е. на величину $\partial_\mu V^\mu(x)$), приводят к одинаковым уравнениям Лагранжа.

Задача N16 Получить уравнения Лагранжа для лагранжиана вида $L(\phi_i(x),\, \partial^\nu\partial_\nu\phi_i(x))$ при условии, что на трехмерной поверхности Σ_3 вариации $\delta\phi_i(x) \,=\, 0$ и $\delta\,\partial^\nu\phi_i(x) \,=\, 0$.

Задача N17 Зная явный вид тензора напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}(x)$ получить явный вид $F_{\mu\nu}(x)$.

Задача N18 Вычислить свертки $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}\,\tilde{F}_{\mu\nu}$ (где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ так называемый дуальный тензор) в терминах напряженностей электрического и магнитного полей. Показать, что эти свертки являются релятивистскими инвариантами.

Задача N19 Пусть тензора $A^{\mu\nu}$ и $B^{\mu\nu}$ задаются формулами

$$A^{\mu\nu} \,=\, F^{\mu\nu} \,+\, \frac{i}{2}\,\tilde{F}^{\mu\nu}, \qquad\qquad B^{\mu\nu} \,=\, F^{\mu\nu} \,-\, \frac{i}{2}\,\tilde{F}^{\mu\nu}.$$

Найти свертку $A^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$. Как можно объяснить полученный результат с физической точки зрения?

Электромагнитное поле

Задача N20* Получить выражение для тензора энергии-импульса T^{μ}_{ν} свободного электромагнитного поля в произвольной калибровке.

Задача N21* Найти решение уравнений Максвелла для свободного электромагнитного поля в кулоновской $div\,\vec{A} \,=\, 0$ и аксиальной $(\vec{n},\vec{A}) \,=\, 0$ калибровках, где div – обычная дивергенция в трехмерном пространстве, а $\vec{n}$ – фиксированный единичный вектор в трехмерном пространстве.

Задача N22 Найти явные выражения для напряженностей электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей через коэффициенты $c_{\vec{k}\,\lambda}$ и $c^{\dagger}_{\vec{k}\,\lambda}$.

Задача N23 В лекциях энергия и импульс свободного электромагнитного поля были найдены как компоненты тензора энергии–импульса. Однако возможен иной путь. Из общего курса физики известно, что энергия в единице объема для свободного электромагнитного поля имеет вид $(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)/2$, а импульс поля в единице объема (вектор Пойнтинга) равен $\vec{E}\times\vec{H}$. Используя результат Задачи N18, получить выражения для энергии и импульса поля в терминах коэффициентов $c_{\vec{k}\,\lambda}$ и $c^{\dagger}_{\vec{k}\,\lambda}$.

Задача N24* Явными вычислениями показать, что:

$$D^{\mu\nu}_{\pm} \,=\, g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(2\pi)^2x^2} \mp \frac{1}{4\pi}\,\delta(x^2)sign(x^0).\right)$$

Задача N25 Доказать, что пропагатор $D^{\mu\nu}_{c}$ электромагнитного поля является функцией Грина уравнения Даламберта, то есть для него выполняется равенство

$$\Box\, D^{\mu\nu}_{c}(x) \,=\, -g^{\mu\nu}\delta^4(x),$$

где $\Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu}$ – даламбертиан.

Уравнения Паули, Клейна-Гордона-Фока и Дирака

Задача N26 Привести примеры истинно нейтральных адронов, отличных от π^0–мезона. Встречаются ли среди них барионы?

Задача N27 Показать, что для следов от матриц Паули σ^i выполняются следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\,\left(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\right) \;&=\; 2\,i\,\varepsilon^{ijk}, \\
\mathrm{Sp}\,\left(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\sigma^l\right) \;&=\; 2\,\left(\delta^{ij}\delta^{kl} \,-\, \delta^{ik}\delta^{jl} \,+\, \delta^{il}\delta^{jk}\right).
\end{aligned}
$$

Пользуясь полученным выше результатом доказать, что

$$
\sigma^i\sigma^j\sigma^k \;=\; i\varepsilon^{ijk}\hat{1} \,+\, \delta^{ij}\sigma^k \,-\, \delta^{ik}\sigma^j \,+\, \delta^{jk}\sigma^i,
$$

где ε^{ijk}–абсолютно антисимметричный псевдотензор третьего ранга для которого $\varepsilon^{123} = +1$, δ^{ij}–символ Кронеккера, латинские индексы $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$.

Задача N28* Предполагая, что движение электрона в атоме водорода можно описать при помощи уравнения Клейна–Гордона–Фока с кулоновским взаимодействием, получить выражение для тонкой структуры спектра. Совпадает ли полученная формула с экспериментальными данными?

Задача N29 Найти унитарные матрицы переходов от стандартного к спинорному представлению и от спирального к спинорному представлению.

Задача N30* Предполагая, что движение электрона в атоме водорода можно описать при помощи уравнения Дирака с кулоновским взаимодействием, получить выражение для тонкой структуры спектра. В чем отличие полученной формулы от результата Задачи N24?

Задача N31* Найти явный вид $u(\vec{p}, \lambda)$ в спиральном и спинорном представлениях.

Алгебра матриц Дирака

Задача N32 Показать, что

$$
\begin{aligned}
\gamma^5 \;&=\; \frac{i}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta, \\
\gamma_\mu\gamma^5 \;&=\; \frac{i}{3!}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta,
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный псевдотензор четвертого ранга, удовлетворяющий соглашению $\varepsilon^{0123} = -1$.

Задача N33 Проверить, что

$$
\begin{aligned}
&\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 \,=\, g^{\mu\nu}\gamma^5 \,-\, \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta,\\
&\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 \,=\, -\,\frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta},\\
&\sigma^{\mu\nu} \,=\, -\,\frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\gamma_5,\\
&\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\zeta \,=\, \left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\zeta} \,-\, g^{\mu\zeta}g^{\nu\alpha} \,+\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\zeta}\right)\gamma_\alpha \,-\, i\varepsilon^{\mu\nu\zeta\alpha}\gamma_\alpha\gamma^5,
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный псевдотензор четвертого ранга, удовлетворяющий условию $\varepsilon^{0123} = -1$, а $\sigma^{\mu\nu} = i/2\,[\gamma^\mu,\,\gamma^\nu]$.

Задача N34 Показать, что

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \,=\, 12I,\\
&\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma_\mu \,=\, -\,2\,\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha,\\
&\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma^\beta\gamma_\nu \,=\, 4\,\gamma^\alpha\gamma^\beta,
\end{aligned}
$$

где $\sigma^{\mu\nu} = i/2\,[\gamma^\mu,\,\gamma^\nu]$ и I – единичная матрица.

Задача N35 Доказать, что

$$
\begin{aligned}
&(I-\gamma^5)\,(I+\gamma^5) \,=\, 0,\\
&(I\pm\gamma^5)^2 \,=\, 2\,(I\pm\gamma^5),\\
&(I\pm\gamma^5)\gamma^\mu \,=\, \gamma^\mu\,(I\mp\gamma^5).
\end{aligned}
$$

С помощью этих соотношений *не длиннее чем в одну строчку* (!) показать, что

$$
\begin{aligned}
&O^\mu\gamma^\nu O_\mu \,=\, -4\,O^\nu,\\
&O^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta O_\mu \,=\, 0,\\
&O^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma O_\mu \,=\, -\,4\,\gamma^\gamma\gamma^\beta O^\alpha,
\end{aligned}
$$

где $O^\mu = \gamma^\mu(I-\gamma^5)$.

Задача N36* Основываясь на результатах предыдущей задачи покажите, что операторы $P_\pm \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\,(I\pm\gamma^5)$ можно рассматривать как проекционные операторы. На какие состояния проецируют эти операторы?

Задача N37* Доказать, что операция взятия следа двух матриц удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Самостоятельно сформулируйте, каким свойствам при этом должны удовлетворять указанные матрицы.

Задача N38 Пусть a^μ, b^ν, c^α и d^β – произвольные 4-вектора. Введем следующее обозначение $\hat{a} = \gamma^\mu a_\mu$, которое широко используется для сокращения записи. Проверить, что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}\,\left(\hat{a}\,\hat{b}\right) = 4\,(ab),\\
&\mathrm{Sp}\,\left(\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}\,\hat{d}\right) = 4\Big((ab)(cd)\,-\,(ac)(bd)\,+\,(ad)(bc)\Big),
\end{aligned}$$

где $(ab) = a^\mu b_\mu$ – скалярное произведение двух 4-векторов a^μ и b^ν.

Задача N39 Чему будет равен $\mathrm{Sp}\,\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\right)$, если вместо определения $\varepsilon^{0123} = -1$, которое было использовано в лекциях, принять другое определение $\varepsilon^{0123} = +1$?

Задача N40* Пусть a^μ – некоторый 4-вектор, подчиняющийся условию $a^\mu a_\mu \equiv a^2 > 0$. Проверить, что

$$\begin{aligned}
e^{i\,\hat{a}} \;&=\; I\,\cos\sqrt{a^2}\,+\,\frac{i\,\hat{a}}{\sqrt{a^2}}\,\sin\sqrt{a^2},\\
e^{\gamma^5\hat{a}} \;&=\; I\,\cos\sqrt{a^2}\,+\,\frac{\gamma^5\,\hat{a}}{\sqrt{a^2}}\,\sin\sqrt{a^2}.
\end{aligned}$$

Задача N41 В квантовой теории поля при вычислении петлевых диаграмм часто удобно перейти из 4-мерного пространства Минковского в D-мерное пространство Минковского, где нулевая компонента по-прежнему отвечает времени, а остальные $D-1$ компонента являются пространственными. В D-мерном пространстве γ- матрицы, единичная матрица I и метрический тензор $g^{\mu\nu}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\{\gamma^\mu,\,\gamma^\nu\}\;=\;2\,g^{\mu\nu}I,\quad g^\mu_\mu = D,\quad \mathrm{Sp}\,I\;=4.$$

Покажите, что при этом все следы γ-матриц, в которые не входит матрица γ^5, остаются прежними.

Задача N42* Сформулируйте, какие трудности возникают в D-мерии (см. предыдущую задачу) при определении матрицы γ^5? Как эти трудности можно попытаться обойти?

Задача N43 Покажите, что в D-мерии

$$\begin{aligned}
&\gamma^\mu\gamma_\mu\;=\;D,\\
&\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu\;=\;-2\,\gamma^\alpha\,-\,(D-4)\,\gamma^\alpha,\\
&\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu\;=\;4\,g^{\alpha\beta}I\,+\,(D-4)\,\gamma^\alpha\gamma^\beta,\\
&\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma_\mu\;=\;-\,2\,\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha\,-\,(D-4)\,\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma.
\end{aligned}$$

Сравните данное вычисление с результатами в 4-мерии и сформулируйте правило перехода от результата вычисления сверток в 4-х измерениях к результату вычисления сверток в D измерениях.

Свойства уравнения Дирака

Задача N44 Доказать, что в стандартном представлении оператор зарядового сопряжения C обладает следующими свойствами:

$$C^{\dagger} = C^{T} = C^{-1} = -C, \qquad C^{*} = C.$$

Задача N45* Найти явный вид оператора зарядового сопряжения в спиральном и спинорном представлениях.

Задача N46* Найти явный вид $v(\vec{p},\lambda)$ в спиральном и спинорном представлениях.

Задача N47 Доказать, что

$$\mathrm{Sp}\,\left(\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\ldots\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\gamma^{\mu_n}\right) = \mathrm{Sp}\,\left(\gamma^{\mu_n}\,\gamma^{\mu_{n-1}}\,\ldots\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_1}\right),$$

где каждая матрица γ^{μ_i} это одна из матриц γ^0, γ^1, γ^2 или γ^3.

Задача важная, но сложная. Поэтому дадим некоторые указания. Случай нечетного n абсолютно тривиален. Для случая четного n необходимо использовать три факта, два из которых доказывались на лекциях ($C\,\gamma^{\mu\,T}C^{\dagger} = -\gamma^{\mu}$ и $C\,C^{\dagger} = I$), а один – в курсе линейной алгебры ($\mathrm{Sp}A^T = \mathrm{Sp}A$).

Задача N48 Проверьте, что $C\,\gamma^{5\,T}C^{\dagger} = +\gamma^5$.

Задача N49 Используя результаты двух предыдущих задач показать, что

$$\mathrm{Sp}\,\left(\gamma^5\gamma^{\mu}\,\gamma^{\nu}\right) = 0.$$

Внимание! В качестве решения НЕ принимается доказательство, которое было проведено на лекции без использования свойств оператора зарядового сопряжения!

Задача N50 Показать, что для свободной частицы релятивистский оператор трехмерного спина $\vec{O}$ коммутирует с гамильтонианом H, то есть $\left[\vec{O},\,H\right] = 0$.

Задача N51 Изменится ли оператор $\vec{O}$, если в представлении Фолди–Вутхайзена в качестве спинового оператора выбрать не оператор $\vec{S} = -\frac{1}{2}\,\gamma^5\vec{\gamma}$ (как в лекциях), а оператор $\vec{S} = -\frac{1}{2}\,\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma}$? Каков явный вид обоих операторов в стандартном представлении?

Задача N52 В стандартном представлении для фермионов и антифермионов найти собственные функции проекционного оператора $\left(\vec{n}\,\vec{O}\right)$, отвечающие спиральностям $\lambda\,=\,\pm 1$.

Задача N53 Проверить, что $\xi_\lambda(\vec{n})\,=\,(-\,\lambda)\;\chi_{-\lambda}(\vec{n})$.

Задача N54* Доказать, что: $v\,(\epsilon,\vec{p},\lambda)\,=\,u\,(-\epsilon,-\vec{p},-\lambda)$. Подумайте, насколько хорошо к записанному выше равенству применима интерпретация, что антифермион — это фермион, который движется вспять по времени с 4-импульсом $-p^\mu$?

Задача N55 Получить матрицы плотности свободных фермионов и антифермионов, то есть проверить, что

$$\sum_{\lambda\,=\,\pm 1} u(\vec{p},\lambda)\,\bar{u}(\vec{p},\lambda)\,=\,\gamma^\mu p_\mu\,+\,I\,m,$$
$$\sum_{\lambda\,=\,\pm 1} v(\vec{p},\lambda)\,\bar{v}(\vec{p},\lambda)\,=\,\gamma^\mu p_\mu\,-\,I\,m.$$

Задача N56 Показать, что в отсутствии внешнего поля из уравнения

$$\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu\,-\,I\,m\Big)\psi^c(x)\,=\,0$$

следует уравнение

$$i\,\partial_\mu\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,+\,\bar{\psi}(x)\,m\,=\,0.$$

Квантование дираковских полей

Задача N57 Показать, что тензор энергии–импульса свободного дираковского поля имеет вид

$$T^\mu_\nu(x)\,=\,\bar{\psi}(x)\,i\gamma^\mu\partial_\nu\,\psi(x).$$

Задача N58 Вычислить импульс и заряд свободного дираковского поля в терминах произведений $a^\dagger_{\vec{p},\lambda}a_{\vec{p},\lambda}$ и $b_{\vec{p},\lambda}b^\dagger_{\vec{p},\lambda}$.

Задача N59 Получить интегральное представление для функции

$$S_-(x-x')\,=\,-\,\langle 0\left|\bar{\psi}^{(+)}(x')\psi^{(-)}(x)\right|0\rangle$$

в виде:

$$S_-(x)\,=\,-\,i\,\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\,+\,Im\right)\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{ipx}}{2\varepsilon_p}.$$

Задача N60 Показать, что

$$\frac{e^{-i\varepsilon_p|t|}}{2\varepsilon_p}\,=\,i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\,p^0}{2\pi}\,\frac{e^{-ip^0t}}{p^2\,-\,m^2\,+\,i\varepsilon}.$$

Указание: вспомнить, что $\varepsilon_p^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$ и провести вычисления интеграла при помощи теории вычетов аналогично тому, как это было сделано для электромагнитного поля.

Задача N61* Показать, что локальные калибровочные преобразования в КЭД допускают существование паулевского взаимодействия вида

$$\mathcal{L}^{int}_{Pauli}(x) = -\mu\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)F_{\mu\nu}(x)$$

наравне с взаимодействием $\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}(x)$.

Задача N62* Почему не имеет никакого физического смысла калибровочное преобразование электромагнитного поля вида $\tilde{A}^{\mu}(x) = A^{\mu}(x)\, e^{i\alpha(x)}$?

Задача N63* Найти явный вид операторов пространственной четности P и обращения времени T для спирального и спинорного представлений.

Задача N64* Прямыми вычислениями показать, что C – четность электромагнитного тока отрицательна.

Задача N65 В стандартном представлении прямым вычислением показать, что лагранжиан КЭД инвариантен относительно CP–, PT–, CT– и CPT–преобразований.

Матрица рассеяния

Задача N66 Доказать операторную формулу:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}\left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \ldots$$

Задача N67 Показать, что если $\hat{A}^{(S)}$ и $\hat{A}^{(H)}$ – операторы одной и той же наблюдаемой в представлении Шредингера (S) и представлении Гейзенберга (H) соответственно, то собственные значения обоих операторов совпадают. Как этот факт можно объяснить с физической, а не с математической точки зрения? Обобщите утверждение на произвольное представление (в том числе и на представление взаимодействия).

Задача N68 Доказать, что коммутационные соотношения в представлениях Шредингера и Гейзенберга имеют один и тот же вид. Как обобщить данное утверждение на любое другое представление (в том числе и на представление взаимодействия)?

Задача N69* Какое преобразование осуществляет переход от представления Гейзенберга (H) к представлению взаимодействия (I)? Можно ли исходя из вида такого преобразования заключить, что $\hat{V}^{(I)} = \hat{V}^{(H)}$?

Задача N70 Доказать, что распад $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$ запрещен. Воспользоваться тем, что π^0–мезоны являются бозонами.

Задача N71* Доказать, что из-за бозевости фотонов распад $\rho^0 \to \gamma\gamma$ запрещен не только за счет электромагнитного взаимодействия (теорема Фарри), но и за счет любого другого взаимодействия.

Задача N72 Получить уравнение эволюции для оператора $\hat{A}^{(I)}$ некоторой физической величины A в представлении взаимодействия.

Задача N73 Из первых принципов получить выражения для амплитуды $\left\langle f \left| S^{(1)} \right| i \right\rangle$ в случае нефизических процессов $\gamma\, e^- \to e^-$ и $e^+e^- \to \gamma$. Какой множитель в амплитуде отвечает за невозможность данных процессов в природе?

Задача N74* Из первых принципов получить выражения для амплитуды $\left\langle f \left| S^{(2)} \right| i \right\rangle$ в случае $e^+e^- \to \gamma\gamma$ и $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Проверить результат, непосредственно применив правила Фейнмана.

Задача N75 Написать правила Фейнмана для вычисления древесных диаграмм в теории с гамильтонианом взаимодействия $\mathcal{H}^{int}(x) = g\,\varphi(x)\,\left(\bar{\ell}(x)\gamma_5\ell(x)\right)$, где $\ell(x)$ – лептонное поле, $\varphi(x)$ – поле псевдоскалярной частицы, g – константа связи.

Релятивистская кинематика

Задача N76 Пусть имеется два 4-импульса, квадраты которых $p_1^2 = m_1^2$ и $p_2^2 = m_2^2$. Показать, что выполняется следующее неравенство для скалярного произведения этих 4–векторов: $p_1^\mu p_{2\mu} \geq m_1 m_2$.

Задача N77 Пользуясь результатами предыдущей задачи, найти верхние и нижние границы для мандельстамовских переменных реакции $2 \to 2$ в различных каналах. Считать, что все четыре частицы имеют *разные* массы.

Задача N78 Определить мандельстамовские переменные для распада $1 \to 3$ и найти для них верхние и нижние границы, если все четыре частицы в распаде имеют *разные* массы. Чтобы задача имела смысл, предположите, что масса распадающейся частицы больше суммы масс всех продуктов распада.

Задача N79 Может ли при столкновении электрона с энергией $E_- = 8$ ГэВ и позитрона с энергией $E_+ = 3,5$ ГэВ родиться пара $B^0\bar{B}^0$- мезонов? А пара $B_s^0\bar{B}_s^0$ мезонов? Как изменится ответ, если выбрать $E_- = 8$ ГэВ и $E_+ = 3,7$ ГэВ? Массы $M_B = 5,27$ ГэВ/c^2 и $M_{B_s} =$

$= 5,37$ ГэВ/с^2. Задачу решить в формализме 4-векторов и релятивистских инвариантов.

Вычисления процессов в КЭД

Задача N80 Найти угловые распределения электронов и фотонов для эффекта Комптона
а) в системе центра масс сталкивающихся частиц;
б) в системе покоя начального электрона.

Задача N81 Не пренебрегая массами электрона и мюона вычислить сечение реакции $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$.

Задача N82 В "скалярной КЭД" найти $\pi^+\pi^+\gamma$ – вершину.

Задача N83* В рамках "скалярной КЭД" вычислить дифференциальное сечение процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$.

Задача N84* В "скалярной КЭД" написать правило Фейнмана для $\pi\pi\gamma\gamma$ – вершины.

Задача N85* Показать, что в нерелятивистском пределе скалярного эффекта Комптона $\gamma\pi \to \gamma\pi$ полное сечение описывается формулой Томсона.

Задача N86* Для пиона электромагнитный формфактор в координатном представлении хорошо аппроксимируется функцией вида

$$F_\pi(r^2) \,=\, \alpha\, e^{-\beta\, r},$$

где α и β – некоторые действительные числа. Учтя, что $\langle r_\pi^2 \rangle \;=\; (0,44 \,\pm\, 0,02)$ фм^2, найти $F_\pi(q^2)$.

Задача N87 Показать, что амплитуда излучения мягкого фотона факторизуется, если в начальном и конечном состоянии находятся не фермионы (как в лекции), а бесструктурные точечные пионы "скалярной КЭД".

Задача N88* Записать глобальные и локальные калибровочные преобразования в "скалярной КЭД". Показать, что из глобальных калибровочных преобразования следуют законы сохранения электромагнитного тока и электрического заряда.

Задача N89* Доказать, что ни в какой теории не возможен распад $P_1 \to P_2\gamma$, где P_1 и P_2 – два РАЗНЫХ скалярных или псевдоскалярных мезона, для которых $M_1 > M_2$.

Задача N90* Найти сечение рассеяния электрона на покоящимся ядре, если в качестве потенциала взаимодействия использовать не кулоновский потенциал (как это было в лекциях), а потенциал Юкавы:

$$V(\vec{r}) \,=\, -\,\frac{e^2}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,e^{-r/a},$$

где a – некоторая постоянная, имеющая размерность длины, $r = |\vec{r}\,|$.